

ШИФР 18248

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	0	8	8	0	12	16	0	2	54	пятьдесят четыре	Кеш

№4. $\sqrt{x^3-3x+1} - x \geq -1$

$\sqrt{x^3-3x+1} \geq x-1 \quad | \quad \uparrow^2$

ОДЗ: $\begin{cases} 1) x-1 \geq 0 \\ 2) x^3-3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) x \geq 1 \\ 2) x^3-3x+1 \geq 0 \end{cases}$

$x^3-3x+1 \geq x^2-2x+1$

$x^3-x^2-x \geq 0$

$x(x^2-x-1) \geq 0$

$x \geq 0; \quad x^2-x-1 \geq 0$

и уг. $x = 1 + \sqrt{5}$

уч. $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ не уг. уч. (1)

8

т.к. $2 < \sqrt{5} < 3$, то

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq 1 \Rightarrow$ уг. условия (1) проверим условие (2):

$$\frac{(1+\sqrt{5})^3}{8} - \frac{3}{2}(1+\sqrt{5}) + 1 \geq \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} - \frac{3+3\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{16+8\sqrt{5}}{8} - \frac{3+3\sqrt{5}}{2} + 12$$

$$\geq \frac{16+8\sqrt{5}-12-12\sqrt{5}}{8} + 1 = \frac{4-4\sqrt{5}}{8} + 1 = \frac{12-4\sqrt{5}}{8} = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) > 0 \Rightarrow$$

Ответ: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

№5. $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$

левая часть:
а) числитель

№1. $A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} - 3(-2)^2 + (\frac{2}{3})^{-2} + 4,75}$

$A = \frac{\frac{1}{4} + 1}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} + \frac{19}{4} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{4}{4}} + \frac{19}{4} = 5$

60% от A $\geq 0,6A = 0,6 \cdot 5 = 3$

Ответ: $3 \geq 0,6A$

4



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 18248

№2. Пусть объёмы добычи компаниями "Новатэк" $= V_H$, "Зенсерт" $= V_P$, Лукойл $= V_L$; Газпром несть $= V_G$, тогда

$$\begin{cases} V_H : V_P : V_L = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{70} \\ V_G = 0,3 V_P \\ V_P = V_H + V_L + V_G + 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_H = 0,4 V_P \\ V_L = 0,2 V_P \\ V_G = 0,3 V_P \\ V_P = V_H + V_L + V_G + 8 \end{cases}$$

$$V_P = 0,4 V_P + 0,2 V_P + 0,3 V_P + 8$$

$$0,1 V_P = 8$$

$$V_P = 80$$

$$V_H = 32$$

$$V_L = 16$$

$$V_G = 24$$

Ответ: $V_{\text{Зенсерт}} = 80$; $V_{\text{Новатэк}} = 32$; $V_{\text{Лукойл}} = 16$; $V_{\text{Газпром}} = 24$

№5

З-мб: $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}$

левая часть:

а) числитель:

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 1 = \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 1 =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 1 = -2 \sin^2 x \cos^2 x$$

б) знаменатель:

$$\sin^6 x + \cos^6 x - 1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - 1 =$$

$$= \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x - 1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= -3 \cos^2 x \sin^2 x$$

из (а) и (б), имеем, что

$$\frac{2}{3} = \frac{-2 \sin^2 x \cos^2 x}{-3 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{2}{3} \quad \text{з.м.г.}$$

№7 $\sqrt{8x-x^2-7} - \sqrt{11-x} \geq \sqrt{9x-x^2-18}$

ОДЗ: $\begin{cases} 8x-x^2-7 \geq 0 \\ 11-x \geq 0 \\ 9x-x^2-18 \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+7 \leq 0 \\ x \leq 11 \\ x^2-9x+18 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1; 7] \\ x \leq 11 \\ x \in [3; 6] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ОДЗ: } x \in [3; 6]$$

перенос $8x-x^2-7 \geq 0$, тогда $9x-x^2-18 \geq 11-x-11 \Rightarrow$

$$\sqrt{t} - \sqrt{11-x} \geq \sqrt{t+x-11} \quad \uparrow^2$$

$$t - 2\sqrt{t(11-x)} + 11-x \geq t+x-11$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18248

№ 7 продолж.

$$x(11-x) \geq x\sqrt{11-x} \quad | \uparrow^2$$

$$(11-x)^2 \geq 11(11-x)$$

$$(11-x)(11-x-11) \geq 0$$

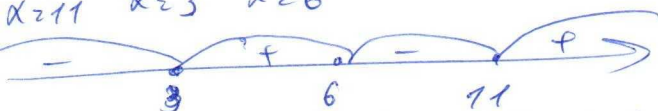
$$(11-x)(11-x-11x+x^2+11) \geq 0$$

$$(11-x)(x^2-9x+18) \geq 0$$

$$(11-x)(x-3)(x-6) \geq 0$$

$$(x-11)(x-3)(x-6) \leq 0$$

$$x=11 \quad x=3 \quad x=6$$



$$x \in (-\infty; 3] \cup [6; 11] ; \text{ с учётом } 0 \leq x \leq 11 \Rightarrow x \in [3; 6]$$

Ответ: $x=3; x=6$

$$\text{№ 8. } \begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\text{ОДЗ: } \sin x \neq 0, \cos x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} = \sin y \\ \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\cos^2 x}{\sin x} = \sin y \\ -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} = \sin^2 y \\ \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} = \cos^2 y \end{cases}$$

сложим данные уравнения:

$$1 = \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \cos^6 x + \sin^6 x;$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^2 x \cos^2 x = 0$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - \sin^2 x \cos^2 x = 0$$

$$\sin^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 0$$

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



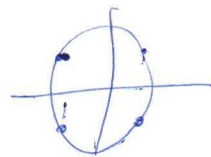
$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



№8 продолж.

I) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$
 $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin y; \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos y \Rightarrow y = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$



II) $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$
 $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin y; \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos y \Rightarrow y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

III) $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$
 $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin y; \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos y \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

IV) $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$
 $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin y; \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos y \Rightarrow \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$

16

Ответ: $(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k); (-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k); (\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k); (-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k)$

№10.

$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a > 0 \quad 1 < a < 3 \quad x = ?$

$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a = 0$
 $\Delta = (13a-27)^2 - 4(4-2a)(33-13a) = 169a^2 - 26 \cdot 27a + 27^2 - 4(132 - 52a - 66a + 26a^2) =$
 $= 169a^2 - 702a + 629 - 528 + 472a - 104a^2 = 65a^2 - 230a + 101$

$4x^2 - 2ax^2 + 13ax - 27x + 33 - 13a > 0$

$a(-2x^2 + 13x - 13) + 4x^2 - 27x + 33 > 0$

$a(-2x^2 + 13x - 13) > 27x - 4x^2 - 33$

$a > \frac{27x - 4x^2 - 33}{-2x^2 + 13x - 13}, \text{ т.к. } 1 < a < 3, \text{ то}$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 18248

N10 продолж.

$$27x - 4x^2 - 33$$

$$\frac{-2x^2 + 13x - 13}{-2x^2 + 13x - 13} \leq 1$$

$$\frac{27x - 4x^2 - 33 + 2x^2 - 13x + 13}{-2x^2 + 13x - 13} \leq 0$$

$$\frac{27x - 2x^2 - 13x - 20}{-2x^2 + 13x - 13} \leq 0 ; \quad \frac{-2x^2 - 14x - 20}{-2x^2 + 13x - 13} \leq 0 ; \quad -2x^2 + 13x - 13 \neq 0$$

$$(2x^2 + 14x + 20)(2x^2 - 13x + 13) \leq 0$$

$$(x^2 + 7x + 10)(2x^2 - 13x + 13) \leq 0$$

$$(x+2)(x+5)(2x^2 - 13x + 13) \leq 0$$

$$2x^2 - 13x + 13 \geq 0$$

$$D = 169 - 8 \cdot 13 \leq 104$$

N3. $R \approx 258 \text{ м}$ $L \geq 12 \text{ м}$ D -то; $n \leq 2018$

лест $L \geq 12 \Rightarrow L - \min \Rightarrow n - \max$, тогда ~~тогда~~ ~~дерева~~ ~~расположены~~

~~увеличились~~ на ~~внешней~~ ~~окружности~~ ~~радиуса~~ ~~R~~ ~~расположено~~

~~не более~~ на ~~концентрических~~ ~~окружностях~~ ~~радиусами~~ ~~от L до R~~

на одном ~~радиусе~~ ~~диаметре~~ ~~316 м~~ ~~уменьшается~~ ~~максимум~~ ~~ровно~~ 43 дерева, 1 из которых

в центре. Также ~~к-во~~ ~~таких~~ ~~диаметров~~ ~~= m~~, ~~т.е.~~ $43m(m-1) \leq 42m+1$

(за вычетом центрального дерева, повтор. $m-1$ раз), где $m=6$;

общее ~~таж~~ ~~к-во~~ ~~деревьев~~: $42 \cdot 6 + 1 + 6 \cdot \left(\frac{21+1}{2} \cdot 20 + 21 \right) \geq 253 + 1446 =$

=