



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18319

Класс 11

Вариант 12

Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	2	4	8	—	—	12	16	12	16	68	шестьдесят восемь	

B 12

74

семьдесят четыре

N1 Дано:

$$0,1A = B$$

$$B = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + (0,2)^{-9} \cdot 25^{-2} + (64)^{-\frac{1}{3}}}{(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2} \cdot (2,017)^0 \cdot \sqrt{0,36}$$

A - ? Решение:

Воспользовавшись св-вами дроби, преобразуем:

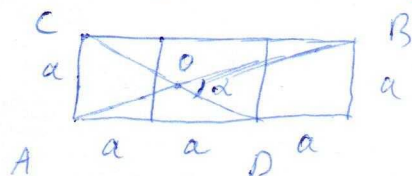
$$B = \frac{(3^{10} \cdot 3^{-9} + 5^4 \cdot 5^{-4} + 2^2) \cdot 1 \cdot \frac{3}{5}}{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} = \frac{(3 + 1 + 4) \cdot \frac{3}{5}}{4 + 2\sqrt{1}} =$$

$$= \frac{8}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow A = 8$$

Ответ: A = 8 V

(4)

N3



1) Обозначим искомым угол через α и сторону квадрата через a ;

$$2) \operatorname{tg} \angle CDA = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} \angle BAD = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle CDA = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \text{ и } \angle BAD = \arctg\left(\frac{1}{3}\right)$$

3) $\angle 2$ является внешним для треугольника ADO,

1



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

18319

Значит $\angle 2 = \angle CDA + \angle BAD = \arctg(\frac{1}{2}) + \arctg(\frac{1}{3})$,

4) П.к. $\arctg(\varphi) \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, то $\arctg(\frac{1}{2}) + \arctg(\frac{1}{3}) < 2\pi$; Возьмём тангенс суммы этих двух аркстан-
генов: $\tg(\arctg(\frac{1}{2}) + \arctg(\frac{1}{3})) = \frac{\tg(\arctg(\frac{1}{2})) + \tg(\arctg(\frac{1}{3}))}{1 - \tg(\arctg(\frac{1}{2})) \cdot \tg(\arctg(\frac{1}{3}))} =$
$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

5) Следовательно, $\tg \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$, п.к. $\angle 2 < 90^\circ$

Ответ: 45° $\checkmark$ (4)

15 $\tg 15^\circ \cdot \tg 85^\circ \cdot \tg 25^\circ \cdot \tg 35^\circ = \tg 15^\circ \cdot \tg(90^\circ - 15^\circ) \cdot \tg 25^\circ \cdot \tg 65^\circ =$

$= \tg 15^\circ \cdot \ctg 15^\circ \cdot \tg 25^\circ \cdot \tg 35^\circ = \tg 25^\circ \cdot \tg 35^\circ =$

17 $\sqrt{6x-x^2-5} - \sqrt{7-2x} \geq \sqrt{8x-x^2-12}$; ОДЗ: $\begin{cases} 6x-x^2-5 \geq 0 \\ 7-2x \geq 0 \\ 8x-x^2-12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; \frac{7}{2}]$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq \sqrt{a-b}$$

П.к. $a \geq b$, иначе $a-b < 0$ и ОДЗ не выполняется, то
и слева и справа стоят неотрицательные выра-
жения, тогда можно возвести в квадрат:

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq a - b \Leftrightarrow b - \sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ \sqrt{b} - \sqrt{a} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b \geq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-x^2-12=0 \\ 8x-x^2-12 \geq 6x-x^2-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2; x=6 \\ 2x-7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{2}$$

Учитывая ОДЗ, Ответ: $\checkmark$

$$x=2; x=\frac{7}{2}$$

(12)

[2]

ШИФР 18319

$$N8 \quad \begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0 & (1) \\ \cos x + \cos y = \sin^2 x & (2) \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x & (3) \end{cases}$$

~~ker-vo~~ кер-во (1) следует из того, что корни квадратного
 треугольника. ; Сложим (1) + (2): ~~$\sin x + \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$~~
 $\sin x + \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}; n \in \mathbb{Z};$

Подставим данное x в ур-е (2):

$$\cos(2\pi n) + \cos y = \sin^2(2\pi n) \Leftrightarrow \cos y = -1 \Leftrightarrow y = \pi + 2\pi k;$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) + \cos y = \sin^2(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) \Leftrightarrow \cos y = 1 \Leftrightarrow y = 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

Итого все ответы: $(2\pi n; \pi + 2\pi k); (\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi k), n, k \in \mathbb{Z}$

N9 $x + 2016 = t$

$$\frac{1}{(t-2)(t-1)} + \frac{1}{(t-1)t} + \frac{1}{t(t+1)} + \frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{999999} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 + 3t + 2 + t^2 - 3t + 2}{(t^2 - 1)(t^2 - 4)} + \frac{t^2 + t + t^2 - t}{t^2(t^2 - 1)} = \frac{1}{999999} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t^2 + 4}{(t^2 - 1)(t^2 - 4)} + \frac{2}{(t^2 - 1)} = \frac{1}{999999} \Leftrightarrow \frac{2t^2 + 4 + 2t^2 - 8}{(t^2 - 1)(t^2 - 4)} = \frac{1}{999999} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - 1)(t^2 - 4)} = \frac{1}{999999} \Leftrightarrow \frac{4}{t^2 - 4} = \frac{1}{999999} \Leftrightarrow t^2 - 4 = 4 \cdot 999999 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 4 \cdot 1000000 \Leftrightarrow t = 2000 \Leftrightarrow x = 46 \quad x = -2016 \quad (12)$$

т.к. $x = 16$ входит в ОДЗ, но ответ: $x = -16$
 $t_1 = ? \quad t_2 = ?$
 $x = -16 \quad x_2 = ? \quad [3]$



ШИФР 18319

№10 Раскроем скобки и сгруппируем все слагаемые с множителем a :

$$2ax^2 - 6x^2 + 32x - 10ax - a - 8 < 0 \Leftrightarrow a(2x^2 - 10x - 1) - 3(2x^2 - 10x - 1) + 2x - 11 < 0$$

Будем рассматривать x как параметр, a , a'' как переменную.

1) При $2x^2 - 10x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{3}}{2}$ независимо от a 1-ый множитель обнуляется.

При $x = \frac{5 - 3\sqrt{3}}{2}$ имеем: $2(\frac{5 - 3\sqrt{3}}{2}) - 11 < 0$, что верно, т.к. $-6 - 3\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ при $x = \frac{5 - 3\sqrt{3}}{2}$ нер-во выполнено $\forall a$.

При $x = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}$ имеем: $2(\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}) - 11 < 0$, что тоже верно, т.к. $-6 + 3\sqrt{3} = -\sqrt{36} + \sqrt{27} < 0 \Rightarrow$ при $x = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}$ нер-во выполнено $\forall a$.

2) При $x \in (-\infty; \frac{5 - 3\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}; +\infty)$ имеем:

$$a < \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1}, \text{ учитывая условие задачи,}$$

$$\frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{6x^2 - 32x + 8 - 8x^2 + 40x + 4}{2x^2 - 10x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 8x + 12 \geq 0 \text{ (знаменатель положительный)}$$

$$\text{Делим на } -\frac{1}{2}: x^2 - 4x - 6 \leq 0 \quad D = 16 + 24 = (2\sqrt{10})^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 2 \pm \sqrt{10} \Leftrightarrow x \in [2 - \sqrt{10}; 2 + \sqrt{10}]$$

$$2 - \sqrt{10} \neq \frac{5 - 3\sqrt{3}}{2}$$

$$2 + \sqrt{10} \neq \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}$$

$$1 \neq 40 + 27 - 6\sqrt{30}$$

$$4 - 2\sqrt{10} \neq \frac{5 - 3\sqrt{3}}{2}$$

$$4 + 2\sqrt{10} \neq \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}$$

$$6\sqrt{30} \neq 66$$

$$-1 \neq 2\sqrt{10} - 3\sqrt{3}$$

$$-1 \neq 3\sqrt{3} - 2\sqrt{10}$$

$$1 \neq 2\sqrt{10} - 3\sqrt{3}$$

Отсюда видно, что ~~каждое из неравенств~~ ~~не выполняется~~!

Итак $x \in [2 - \sqrt{10}; \frac{5 - 3\sqrt{3}}{2}] \cup (\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}; 2 + \sqrt{10}]$

(8)

ШИФР 18319

3) При $x \in \left(\frac{5-3\sqrt{3}}{2}; \frac{5+3\sqrt{3}}{2} \right)$

$a > \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1}$, учитывая условие задачи,

$\frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{6x^2 - 32x + 8 - 4x^2 + 20x + 2}{2x^2 - 10x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 10 \geq 0$ (знаменатель отрицательный)

$x^2 - 6x + 5 \geq 0 \quad D = 4^2 \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 5; 1$

$x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$ т.к. $5 < \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{27}}{2}$ и

$1 > \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{27}}{2}$, то получаем $x \in \left(\frac{5-3\sqrt{3}}{2}; 1 \right] \cup$
 $\cup [5; \frac{5+3\sqrt{3}}{2})$

Совмещая полученные промежутки, итоговый

ответ: $x \in [2 - \sqrt{10}; 1] \cup [5; 2 + \sqrt{10}]$ ✓ (16)

№2 Пусть x - производительность; V_1 и V_2 - объёмы 1-го и 2-го танкера соответственно; Тогда составим систему ур-ий:

$$\begin{cases} 44x = \frac{V_1}{3} + \frac{V_2}{4} & (1) \\ \frac{V_1}{3x} + \frac{V_2}{4x} = 18 & (2) \end{cases}$$
 Вопрос задачи: $\frac{V_2}{3x}$; из (1) $V_1 =$
 $= \left(\frac{V_2}{3} - 44x \right)$; Подставим V_1 в (2):

$$\frac{\left(\frac{V_2}{3} - 44x \right)}{3x} + \frac{V_2}{4x} = 18 \Leftrightarrow \frac{V_2}{9x} - \frac{44}{3} + \frac{V_2}{4x} = 18;$$

$$\frac{V_2}{x} = t; \quad \frac{t}{9} + \frac{t}{4} = 18 + \frac{44}{3} \Leftrightarrow 13t = 648 + 528 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{1176}{13}; \quad \frac{V_2}{3x} = \frac{t}{3} = \frac{392}{13}$$

Ответ: за $\frac{392}{13}$ часа ?

(2)



№ 4 По задан $x \in [-1; 1]$

$$f(x) = (\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) - \frac{x}{4}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x} + 1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1} - 1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{4} = \frac{2(1-x) + 2 + 2(x+1) - 2}{4\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2(1-x) + 2\sqrt{1-x} + 2(x+1) - 2\sqrt{x+1} - 2}{4\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{1-x}} = \frac{3 + 2\sqrt{1-x} - 2\sqrt{x+1}}{4\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{1-x}}$$

неотриц.,

т.к. знаменатель ~~неотриц.~~, то при исследовании знака производной он ни на что не влияет $\Rightarrow$ нам ~~важен~~ лишь знак числителя: $3 + 2\sqrt{1-x} - 2\sqrt{x+1} =$

$$= 3 + 2\sqrt{1-x} + (-2\sqrt{x+1});$$

Этот числитель есть сумма убывающих функций, а значит, он и сам является убывающей функцией. Тогда

при $x = 1$ числитель равен $3 - 2\sqrt{2} > 0$, а при $x < 1$ и того больше, значит, ~~этот~~ числитель производной всегда положителен, а значит, вся производная всегда положительна.

Тогда имеет уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ — это возрастающая функция, ~~заметьте~~ ^{замечим},

что $f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ — это корень уравнения,

но т.к. $f(x)$ — возраст. функция, то все свои значения она принимает лишь в одной точке ~~и один раз~~, а значит, $x = 0$ — это единственный корень. Ответ: $x = 0$

~~неверно?~~

~~НЕВЕРНО~~

8

16

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 18319

№ 1) Пусть собака была у 1-ого велосипедиста.



Первая встреча собаки и 2-ого
произошла через x часов, тогда: $15x = 75 - 13x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{75}{28}$ ч. К этому времени собака пробежала

$$15 \cdot \frac{75}{28} = \frac{1125}{28} \text{ км, а 1-ый проехал } 12 \cdot \frac{75}{28} = \frac{900}{28} \text{ км,}$$

$$2\text{-ой проехал } 13 \cdot \frac{75}{28} = \frac{975}{28} \text{ км и расстояние между ними}$$

$$1 \text{ и } 2 = 75 - \frac{975}{28} - \frac{900}{28} = \frac{28 \cdot 75 - 13 \cdot 75 - 12 \cdot 75}{28} =$$

$$= \frac{3 \cdot 75}{28} \text{ км; Теперь через } y \text{ часов собака опять встре-}$$

$$\text{титов с 1 и получим ур-е: } 15y = \frac{3 \cdot 75}{28} - 12y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27y = \frac{3 \cdot 75}{28} \Rightarrow y = \frac{25}{28 \cdot 3} \text{ и собака пробе-}$$

$$\text{жала в ещё } 15 \cdot \frac{25}{28 \cdot 3} = \frac{75}{28}; \text{ через 2 часов собака}$$

$$\text{встретится с 2 снова; К этому времени}$$

$$1\text{-ый проедет } \frac{25}{28 \cdot 3} \cdot 12 = \frac{25 \cdot 4}{28}, \text{ а 2-ой } \frac{25}{28 \cdot 3} \cdot 13 =$$

$$\text{и расстояние между ними будет: } \frac{3 \cdot 75}{28} - \frac{25 \cdot 4}{28} -$$

$$- \frac{13 \cdot 25}{28 \cdot 3} = \frac{25 \cdot 5}{28} - \frac{25 \cdot 13}{28 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 25}{28 \cdot 3}; \text{ через 2 часов собака}$$

$$\text{опять встретит 2-ого: } 15z = \frac{2 \cdot 25}{28 \cdot 3} - 13z \Rightarrow 28z = \frac{2 \cdot 25}{28 \cdot 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{2 \cdot 25}{28 \cdot 28 \cdot 3} \text{ и проедет } \frac{2 \cdot 25}{28 \cdot 28 \cdot 3} \cdot 15 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 25}{28 \cdot 28}$$

?