ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19433

Класс 11 **Вариант** 11 **Дата Олимпиады** 10.02.2018

Площадка написания г. Москва, МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	4	8	8	12	12	2	16	12	82	восемьдесят два	Кем

N 1.

$$A=\frac{2^{-2}+2018^0}{(0,5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4,75=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}{2^2-5\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{19}{4}=\frac{5/4}{4-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}}+\frac{19}{4}=$$

$$=\frac{20}{4}=5$$

60% от 5 это 3. $(5\cdot 0,6)$

Ответ: 3

4

N 2.

$$H:P:\Lambda=\frac{1}{5}:\frac{1}{2}:\frac{1}{10}$$

Пусть $H=2x$, $P=5x$, $\Lambda=x$ (объем добычи газа соответствующих компаний)

Добыча Газпрома ~~доби~~ составляет 30% от $5x$, то есть $1,5x$

Воспользуемся последним данным условием:

$$5x=2x+x+1.5x+8$$
$$0,5x=8$$
$$x=16.$$

4

Ответ: Роснефть 80 млрд куб.м.
Новатэк 32 млрд куб.м.
Лунойл 16 млрд куб.м.
Газпром 24 млрд куб.м

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

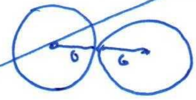
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19433

№3

~~Рассчитаем площадь рощи: $S=\pi R^2 = \pi\cdot 258^2 = 66564\pi$ м²~~

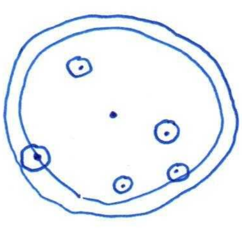
~~Если между любыми двумя деревьями расстояние не меньше, чем 12 м, то вокруг любого дерева можно описать окружность радиуса 6, так, чтобы никакие две окружности не пересекались (касание может быть, но не пересечение)~~



~~Допустим, деревьев было 2019. Тогда суммарная площадь, которую они занимают, составит не менее $2019\cdot\pi\cdot 6^2 = 36\cdot 2019\pi = 72684\pi$ м²~~

Поместим рощу радиуса 258 м в окружность радиуса 264 м так, что центры рощи и этой окружности совпадают.

Поскольку между любыми 2умя деревьями расстояние не меньше 12м, то около каждого дерева можно провести окружность радиуса 6 так, что никакие две окружности не пересекаются (возможно касание, но не пересечение)



4

Все эти окружности будут находиться внутри окружности радиуса 264 м, поскольку ~~крайнее~~ самое дальнее положение от центра рощи - это точки на окружности рощи, и если дерево стоит там, то окружность около этого дерева лежит в окружности ~~рощи~~ радиуса 264 м (поскольку разность радиусов равна расстоянию между центрами). (Понятно, что любая ~~окруж~~ окружность, описанная около дерева, которое лежит ближе к центру рощи, так же лежит внутри окружности радиуса 264 м)

Тогда площадь большой окружности равна $\pi\cdot 264^2 = 69596\pi$, а суммарная площадь описанных у деревьев окружностей, если их больше, чем 2018 составит не менее $2019\cdot\pi\cdot 6^2 = 2019\cdot 36\cdot\pi = 72684\pi$ м²

Но все эти маленькие окружности лежат внутри большой и не пересекаются между собой, значит, их суммарная площадь не может превышать 69596π.

Противоречие. Значит, деревьев не может быть более 2018.

ШИФР 19433

№4.

$$\sqrt{x^3-3x+1}-x=-1$$

$$\sqrt{x^3-3x+1}=x-1$$

возведем в квадрат, а найденные решения проверим на вхождение в ОДЗ:

8

$$x^3-3x+1=x^2-2x+1$$

$$x^3-x^2-x=0$$

$$x(x^2-x-1)=0$$

$x_1=0$ не подходит, поскольку при возведении в квадрат $x-1$ должно быть не меньше 0.

x^2-x-1

$D=1+4=5$

$x_3=\frac{1+\sqrt5}{2}$

$x_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$

$x_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$ не подходит, т.к. тогда $x-1<0$

проверим, подходит ли $x_3=\frac{1+\sqrt5}{2}$. $x_3>1 \Rightarrow x-1>0$

Подставим в подкоренное выражение:

$$\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^3-3\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)+1=\frac{1+3\sqrt5+15+5\sqrt5-12-12\sqrt5+8}{8}=\frac{12-4\sqrt5}{8}>0.$$

Значит, $x_3=\frac{1+\sqrt5}{2}$ подходит.

Ответ: $x=\frac{1+\sqrt5}{2}$

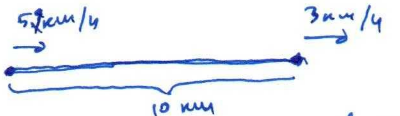
№5.

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha-1}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\cos^2+\cos^4\alpha)-1}=\frac{-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=2/3\text{, ч.т.д.}$$

8

№6.



Скорость сближения путешественников равна $5-3=2$ км/ч

Они встретятся через $10/2=5$ часов

Оса летала 5 часов со скоростью 12 км/ч, то есть пролетела 60 км.

12 Ответ: 60 км.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19433

№7.

$$\sqrt{8x-x^2-7}-\sqrt{11-x}\geq\sqrt{9x-x^2-18}$$

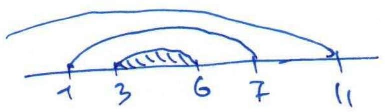
Найдем ОДЗ:

1) $8x-x^2-7\geq 0$
$x^2-8x+7\leq 0$
$(x-1)(x-7)\leq 0$
$x\in[1;7]$

2) $11-x\geq 0$
$x\leq 11$

3) $9x-x^2-18\geq 0$
$x^2-9x+18\leq 0$
$(x-6)(x-3)\leq 0$
$x\in[3;6]$

Из 1), 2), 3) следует, что общее ОДЗ $x\in[3;6]$



Пусть $8x-x^2-7=a$
$9x-x^2-18=b$
тогда $a-b=11-x$

12

Тогда неравенство примет вид: $\sqrt{a}-\sqrt{a-b}\geq\sqrt{b}$, или

$\sqrt{a}\geq\sqrt{b}+\sqrt{a-b}$ $\mid\uparrow 2$

$a\geq b+a-b+2\sqrt{b}\sqrt{a-b}$

$2\sqrt{b}\sqrt{a-b}\leq 0$

$\Downarrow$

либо $b=0$,

либо $a-b=0$.

Если $b=0$, то $9x-x^2-18=0$, $x_1=3$, $x_2=6$ (входят в ОДЗ)

если $a-b=0$, то $11-x=0$, $x=11$ – не входит в ОДЗ

Ответ: $x_1=3$
$x_2=6$.

№10.

$(4-2a)x^2+(13a-27)x+33-13a>0$

$4x^2-2ax^2+13ax-27x+33-13a>0$

$a(13x-13-2x^2)+4x^2-27x+33>0$ $\forall\ a\in(1;3)$

Относительно a – это ~~уравнение~~ – прямая вида $ka+b$.

Рассмотрим несколько случаев:

1) $k=0$, т.е. $13x-13-2x^2=0$
$2x^2-13x+13=0$
$D=13^2-13\cdot 8=13\cdot 5=65$
$x_1=\frac{13+\sqrt{65}}{4}$, $x_2=\frac{13-\sqrt{65}}{4}$

Найдем корни уравнения $4x^2-27x+33=0$
$D=27^2-33\cdot 8=3(243-88)=3\cdot 155=465$
$x_1=\frac{27+\sqrt{465}}{8}$, $x_2=\frac{27-\sqrt{465}}{8}$

продолжение решения

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19433

Рассмотрим расположение на числовой оси корней двух этих уравнений:

$\frac{26+2\sqrt{65}}{8}$ ($\sqrt{260}$), $\frac{26-2\sqrt{65}}{8}$ ($\sqrt{260}$), $\frac{27+\sqrt{465}}{8}$, $\frac{27-\sqrt{465}}{8}$

x_1, x_2, x_3, x_4

x_3 очевидно больше каждого из оставшихся => он правее всех (Также очевидны неравенства $x_3>x_4$, $x_1>x_2$)

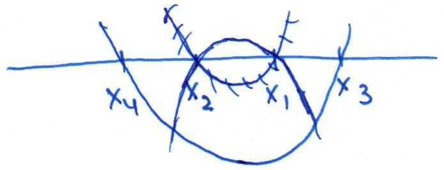
сравним x_1 и x_4:

$$26+\sqrt{260} \vee 27-\sqrt{465}$$
$$\sqrt{260}+\sqrt{465} \vee 1$$
$$>$$
$$\underline{x_1 > x_4}$$

Теперь сравним x_2 и x_4:

$$26-\sqrt{260} \vee 27-\sqrt{465}$$
$$-\sqrt{260}+\sqrt{465} \vee 1$$
$$>$$
$$\underline{x_2 > x_4}$$

Из вышесказанного следует такое расположение корней:

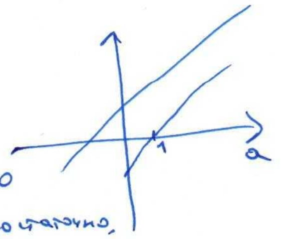


Отсюда следует, что значение трехчлена $4x^2-27x+33$ от x_1 и x_2 отрицательны

$\Downarrow$

в этом случае решений нет.

2) $k>0$ т.е. $\left[\begin{array}{l} x > \frac{26+\sqrt{260}}{8} = \frac{13+\sqrt{65}}{4} \\ x < \frac{26-\sqrt{260}}{8} = \frac{13-\sqrt{65}}{4} \end{array}\right.$



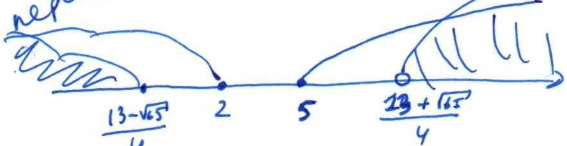
Если $k>0$, то прямая имеет такой вид.

Чтобы для любого $a\in(1;3)$ выполнялось, что значение прямой больше 0, необходимо и достаточно, чтобы значение прямой от $a=1$ было больше или равно 0.

Тогда: $13x-13-2x^2+4x^2-27x+33 \geq 0$

$$2x^2-14x+20 \geq 0$$
$$x^2-7x+10 \geq 0$$
$$(x-5)(x-2) \geq 0$$
$$\left[\begin{array}{l} x \geq 5 \\ x \leq 2 \end{array}\right. \rightarrow$$

Учтем первоначальные возможные значения x:



В этом случае ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x > \frac{13+\sqrt{65}}{4} \\ x < \frac{13-\sqrt{65}}{4} \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ продолжение дальше

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

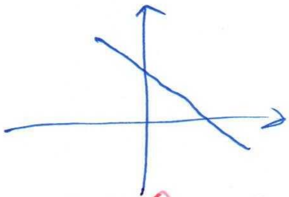
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР ~~19433~~ 19433

3) $k<0$, т.е. $x \in \left(\frac{13-\sqrt{65}}{4}; \frac{13+\sqrt{65}}{4}\right)$

Тогда прямая имеет вид:



В этом случае необходимо и достаточно, чтобы значение ~~прямой~~ ф-ии от $a=3$ было больше или равно 0.

$$\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f(3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[3-\sqrt{6}; 2\right] \cup \left[5; 3+\sqrt{6}\right]$$

$$3(13x-13-2x^2) + 4x^2-27x+33 \geq 0$$

?

$$26x-26-6x^2+4x^2-27x+33 \geq 0$$

$$-2x^2-x+7 \geq 0$$

$$2x^2+x-7 \leq 0$$

$$D=1+28=29$$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{29}}{4} \qquad \Rightarrow x \in \left[\frac{-1-\sqrt{29}}{4}; \frac{-1+\sqrt{29}}{4}\right]$$

$$x_2=\frac{-1-\sqrt{29}}{4}$$

12

Сравним:

$$\frac{-1+\sqrt{29}}{4} \vee \frac{13-\sqrt{65}}{4} \quad |\cdot 4$$

$$\sqrt{29}+\sqrt{65} \vee 14$$

$$29+65+2\sqrt{29}\sqrt{65} \vee 196$$

$$\sqrt{29\cdot 65} \vee 51$$

$$\sqrt{1885} \vee \sqrt{2601}$$

$$<$$

$$\frac{-1+\sqrt{29}}{4} < \frac{13-\sqrt{65}}{4}$$

Учтем первоначальные возможные значения:

$$\frac{-1-\sqrt{29}}{4} \quad \frac{\sqrt{29}-1}{4} \quad \frac{13-\sqrt{65}}{4} \quad \frac{13+\sqrt{65}}{4}$$

$\Downarrow$

в этом случае решений нет.

Тогда ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x>\frac{13+\sqrt{65}}{4} \\ x<\frac{13-\sqrt{65}}{4} \end{array}\right.$$

№8.

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin^2 x-1}{\sin x} = \sin y \\ \frac{\cos^2 x-1}{\cos x} = \cos y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-\cos^2 x}{\sin x} = \sin y \\ -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x \cos x = -\sin y \\ \operatorname{tg} x \sin x = -\cos y \end{cases}$$

Перемножим, получим

$$\cos x \sin x = \sin y \cos y$$

$$2\cos x \sin x = 2\sin y \cos y$$

$$\sin 2x = \sin 2y$$

2

Далее 2 случая:

1) $2x=2y+2\pi n$

$x=y+\pi n$

?

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19433

~~№10.~~ №9.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{k^2-2k+1}+\sqrt[3]{k^2-k}+\sqrt[3]{k^2}}$$

$$\sqrt[3]{k^2-2k+1}+\sqrt[3]{k^2-k}+\sqrt[3]{k^2}=\sqrt[3]{(k-1)^2}+\sqrt[3]{k(k-1)}+\sqrt[3]{k^2}=\left((k-1)^{1/3}+k^{1/3}\right)^2-\left(k(k-1)\right)^{1/3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(k-1)^2}+\sqrt[3]{k(k-1)}+\sqrt[3]{k^2}}=\frac{\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}}{(\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1})(\sqrt[3]{(k-1)^2}+\sqrt[3]{k(k-1)}+\sqrt[3]{k^2})}=\frac{\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}}{k-k+1}=\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}$$

т.е. выражение принимает вид $1+\sqrt[3]{k}$, т.е. k должно быть полным кубом (общая сумма для наших слагаемых)

наименьший полный куб ~~чем~~ больший 2017 равен

$2197=13^3$

Ответ: $13^3=2197$

16