Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 11262

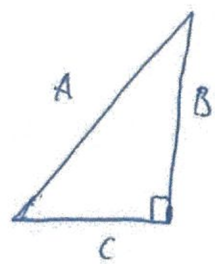
Класс 11 Б Вариант ~~7 112 62~~ Дата Олимпиады 11.2.2017

Площадка написания МГТУ имени Баумана

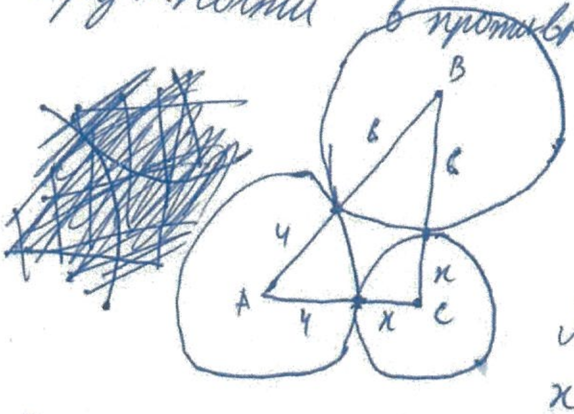
Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	4	5	4	10	10	10	15	0	5 15	68 78	шестьдесят восемь	

семьдесят восемь

№ 8 (начало)



сначала нужно определиться какая из окружностей будет располагаться в вершине с углом 90°. Так как сторона A самая большая в нашем треугольнике так как является его гипотенузой, ~~вы~~ то на ней должны пересекаться наибольшая и средняя окружности в противном случае рисунок не удается.



Точки касания окружностей лежат на сторонах треугольника так как стороны соединяющие это отрезки соединяющие центры окружностей. Пусть радиус меньшей окружности x тогда сторона BC = 6 + x,

$AC = 4 + x$, сторона $AB = 6 + 4$, так как AB — гипотенуза по из теоремы пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$ то есть

$(6+4)^2 = (4+x)^2 + (6+x)^2$ решим это уравнение относительно x, где $x > 0$ так как это радиус

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

ШИФР 11262

№ 8 (продолжение)

$(6+4)^2 = (4+x)^2 + (6+x)^2$

$100 = 16 + 8x + x^2 + 36 + 12x + x^2$

$100 = 52 + 20x + 2x^2$

$2x^2 + 20x - 48 = 0 \quad |:2$

$x^2 + 10x - 24 = 0$

a b c

$D = 100 - 4(-24)(1) = 196$

$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{196}}{2\cdot(1)}$

$x_1 = \frac{-10-14}{2}$

$x_1 = \frac{-24}{2}$

$x_1 = -12$ – не уд. условию, что $x > 0$

$x_2 = \frac{-10+14}{2}$

$x_2 = \frac{4}{2}$

$x_2 = 2$

Ответ: 2

№ 4

$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$

$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{11}{12}$

$\frac{11}{6}\log_3 x = \frac{11}{12}$

$2\log_3 x = 1$

$\log_3 x^2 = \log_3 3$

$\log_3 x^2 = \log_3 3$

$x^2 = 3$

$\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} < 0 \end{array}\right.$

4

Ответ: $-\sqrt{3}$; $+\sqrt{3}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(a b) c = a (b c)$ $E = mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11262

№1

$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9)$

$(x-1)(x-3)(x-5) - x(x^2-9) = 0$

$(x-1)(x-3)(x-5) - x(x-3)(x+3) = 0$

$(x-3)\big((x-1)(x-5) - x(x+3)\big) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ (x-1)(x-5) - x(x+3) = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^2-5x-x+5-x^2-3x=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ -9x+5=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ -9x=-5 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{5}{9} \end{array}\right.$

Ответ: $x=3$; $x=\frac{5}{9}$

№2 (начало)

$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$

$\sqrt{3x+1} = 2 - \sqrt{x-1}$

$3x+1 = 4 - 4\sqrt{x-1} + x - 1$

$2x - 2 = -4\sqrt{x-1} \quad |:2$

$x-1 = -2\sqrt{x-1}$

$x^2-2x+1 = 4(x-1)$

$x^2-2x+1 = 4x-4$

$x^2-6x+5=0$

ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l} x-1 \geqslant 0 \\ 3x+1 \geqslant 0 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x \geqslant 1 \\ x \geqslant -\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Оставляем условие $x \geqslant 1$ так как оно включает $x \geqslant -\frac{1}{3}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11262

№2 (продолжение)

$x^2-6x+5=0$

$x_1+x_2=+6$

$x_1\cdot x_2=5$

$x_1=1$

$x_2=5$

Ответ: $x=1$; $x=5$

№3

$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$

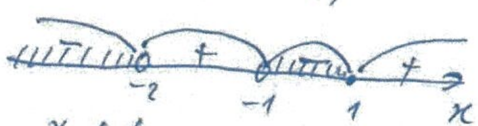
$\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2} \geq 0$

$\frac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$

$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$

$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)} \geq 0$

$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)} \leq 0$



$x \in (-\infty;-2)$ и $x \in (-1;1]$

Ответ: $x \in (-\infty;-2)$ и $x \in (-1;1]$

ШИФР 11 262

№5

$8\cdot 4^x+1 \le 6\cdot 2^x$

$8\cdot (2^2)^x+1 \le 6\cdot 2^x$

Пусть $2^x = t$ тогда

$8t^2+1 \le 6t$

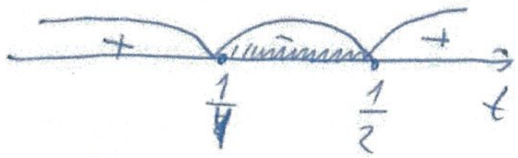
$8t^2 - 6t + 1 \le 0$

$D = 36 - 4(8)(1) = 4$

$t_{12} = \dfrac{+6 \pm \sqrt{4}}{2(8)}$

$t_1 = \frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{1}{4}$



$\frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} \le 2^x \le \frac{1}{2}$

$2^{-2} \le 2^x \le 2^{-1}$

$-2 \le x \le -1$

$x \in [-2; -1]$

Ответ: $x \in [-2; -1]$

№6

Пусть кошек шамских пород будет x тогда ~~ан~~ ангорских $0,5x$ так как шамских в 2 раза больше. Персидских кошек тогда $1,5x$ так как их в 1,5 раза больше чем шамских. А сибирских тогда $1,5x - 13$ так как их на 13 меньше чем персидских. Всего кошек 77 штук. Составим уравнение

$(x)+(\frac{1}{2}x)+(1,5x)+(1,5x-13)=77$

решим его

$x+\frac{1}{2}x+1,5x+1,5x-13=77 \mid \cdot 2$

$2x+x+3x+3x-26=154$

$9x-26=154$

$9x=180$

$x=20$ – количество шамских кошек

$20\cdot\frac{1}{2} = 10$ – ангорских

$20\cdot 1,5 = 30$ – персидских

$20\cdot 1,5 - 13 = 17$ – сибирских

Ответ: 17 – сибирских
10 – ангорской
30 – персидской
20 – шамских

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11 262

№7

$\lg 2$; $\lg(2^x-1)$; $\lg(2^x+1)$

так как эти числа должны составить арифметическую прогрессию то $\lg 2+\lg(2^x+1)=2\lg(2^x-1)$

решим уравнение и найдём из него x

$\lg 2+\lg(2^x+1)=2\lg(2^x-1)$

ОДЗ: $\begin{cases} 2^x+1>0 \\ 2^x-1>0 \end{cases}$

$2^x>1$

$x>0$

$\lg 2\cdot(2^x+1)=\lg(2^x-1)^2$

Пусть $2^x=t$ тогда

$\lg 2(t+1)=\lg(t-1)^2$, $t>0$

$2(t+1)=(t-1)^2$

$2t+2=t^2-2t+1$

$t^2-4t-1=0$

$D=16-4(-1)(1)=20$

$t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2\cdot(1)}$

$t_{1,2}=\frac{4\pm2\sqrt5}{2}$

$t_{1,2}=2\pm\sqrt5$

$t_1=2-\sqrt5$ - это выражени меньше 0 что не уд условию $t>0$

$t_2=2+\sqrt5$

$t=2+\sqrt5$

$2^x=2+\sqrt5$

$2^x=2+\sqrt5$

$\log_2(2^x)=\log_2(2+\sqrt5)$

$x\log_2 2=\log_2(2+\sqrt5)$

$x=\log_2(2+\sqrt5)$

Ответ: при $x=\log_2(2+\sqrt5)$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11262

№ 10

A^3+3A

$A=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

пусть $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}=a$

$\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=b$

? тогда $A=a-b$ при этом

$a\cdot b=-1$ как на $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

$a^3 - b^3=4$? как как $(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2})^3-(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2})^3=$

$=(\sqrt{5}+2)-(\sqrt{5}-2)=4$

$A=a-b$

$A^3+3A=(a-b)^3+3(a-b)$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+3a+3b$

$\underset{4}{(a^3-b^3)}-3a\underset{1}{(ab)}+3b\underset{1}{(ab)}+3a-3b$

$4-\cancel{3a}+\cancel{3b}+\cancel{3a}-\cancel{3b}=4$

Ответ: 4 ✓