ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19944

Класс 11 **Вариант** 11 **Дата Олимпиады** 10.02.2018

Площадка написания МГТУ имени Н. Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	4	8	8	2	12	16	16	—	74	Семьдесят четыре	

1. Найти: 0,6A, где $A = \frac{2^{-2}+2018^0}{(\frac{1}{2})^{-2}-5(-2)^{-2}+(\frac{2}{3})^{-2}} + 4,75$

Решение: 1. $A = \frac{2^{-2}+2018^0}{(\frac{1}{2})^{-2}-5(-2)^{-2}+(\frac{2}{3})^{-2}} + 4,75 =$

$= \frac{\frac{5}{4}}{4-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}} + 4,75 = \frac{\frac{5}{4}}{5} + 4,75 = 0,25 + 4,75 = 5$

2. $0,6A = 0,6 \cdot 5 = 3$

4

Ответ: 3.

2. Пусть „Новатэк" добыла x млрд. куб. м; „Роснефть" – y; „Лукойл" – z, „Газпром нефть" – a.

Тогда $x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{2} : \frac{1}{10} = 2 : 5 : 1 \iff \begin{cases} y = 5z \\ x = 2z \end{cases}$

$0,3y = a$

$0,3 \cdot 5z = a \iff a = 1,5z$

$x + z + a + 8 = y$

$2z + z + 1,5z + 8 = 5z \quad | \cdot 2$

$4z + 2z + 3z + 16 = 10z$

$\begin{cases} z = 16 \\ y = 80 \\ x = 32 \\ a = 24 \end{cases}$

Ответ: „Новатэк" – 32 млрд. куб. м
„Роснефть" – 80 млрд. куб. м
„Лукойл" – 16 млрд. куб. м
„Газпром нефть" – 24 млрд. куб. м

4

4. $\sqrt{x^3-3x+1} - x = -1$

$\sqrt{x^3-3x+1} = x-1$

$\begin{cases} x^3-3x+1 = (x-1)^2 \quad (1) \\ x \geq 1 \end{cases}$

(1) $x^3-3x+1 = x^2-2x+1$

$x^3 - x^2 - x = 0$

$x(x^2-x-1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2-x-1 = 0 \quad (2) \end{array}\right. \iff$

(2) $x^2-x-1=0$

$D = 1+4 = 5$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x \geq 1 \end{cases} \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.

8

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19944

5\. Док-ть: $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2}{3}$

Док-во: 1. $\sin^4\alpha=(\sin^2\alpha)^2=(1-\cos^2\alpha)^2=1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1=1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha+\cos^4\alpha-1=$

$=2\cos^4\alpha-2\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-1)$

2\. $\sin^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3=(1-\cos^2\alpha)^3=1-3\cos^2\alpha+3\cos^4\alpha-\cos^6\alpha$

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1=1-3\cos^2\alpha+3\cos^4\alpha-\cos^6\alpha+\cos^6\alpha-1=$

$=3\cos^4\alpha-3\cos^2\alpha=3\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-1)$

3\. $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}{3\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}=\dfrac{2}{3}$ (ч.т.д.)

18

7\. $\sqrt{8x-x^2-7}-\sqrt{11-x}\geqslant\sqrt{9x-x^2-18}$

$\sqrt{8x-x^2-7}\geqslant\sqrt{11-x}+\sqrt{9x-x^2-18}$

$\begin{cases}8x-x^2-7\geqslant 11-x+9x-x^2-18+2\sqrt{(11-x)(9x-x^2-18)} & (1)\\ 3\leq x\leq 6\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=11\\x=6\\x=3\end{array}\right.\\ 3\leq x\leq 6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\x=3\end{array}\right.$

(1) $2\sqrt{(11-x)(9x-x^2-18)}\leq 8x-\cancel{x^2}-7-11+x-9x+\cancel{x^2}+18$

$2\sqrt{(11-x)(9x-x^2-18)}\leq 0\Leftrightarrow(11-x)(9x-x^2-18)=0$

$\left[\begin{array}{l}x=11\\9x-x^2-18=0\ (2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=11\\x=6\\x=3\end{array}\right.$

(2) $x^2-9x+18=0$

$D=81-72=9$

$x_{1,2}=\dfrac{9\pm3}{2}$

$\left\{\begin{array}{l}x=6\\x=3\end{array}\right.$

12

Ответ: $\{3;6\}$.

8\. $\begin{cases}\sin x-\dfrac{1}{\sin x}=\sin y\\ \cos x-\dfrac{1}{\cos x}=\cos y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sin^2x-1}{\sin x}=\sin y\\ \dfrac{\cos^2x-1}{\cos x}=\cos y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{\cos^2x}{\sin x}=\sin y\\ -\dfrac{\sin^2x}{\cos x}=\cos y\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-\cos^2x=\sin x\sin y\\ -\sin^2x=\cos x\cos y\\ \sin x\neq0\\ \cos x\neq0\end{cases}$ (1)

(1) $\begin{cases}-\cos^2x=\sin x\sin y=\frac12\cos(x-y)-\frac12\cos(x+y)\\ -\sin^2x=\cos x\cos y=\frac12\cos(x-y)+\frac12\cos(x+y)\end{cases}$ $\oplus$ $\Leftrightarrow\cos(x-y)=-1$

$x-y=\pi+2\pi k,k\in Z$

$\underbrace{x=y+\pi+2\pi k,k\in Z}$

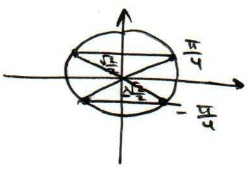
(2) $\sin x-\dfrac{1}{\sin x}=\sin y$

$\sin(y+\pi+2\pi k)-\dfrac{1}{\sin(y+\pi+2\pi k)}=\sin y$

$\sin(y+\pi)-\dfrac{1}{\sin(y+\pi)}=\sin y$

$\sin y\cos\pi+\cos y\sin\pi-\dfrac{1}{\sin y\cos\pi-\cos y\sin\pi}=\sin y$

$-\sin y+\dfrac{1}{\sin y}=\sin y$



$2\sin y=\dfrac{1}{\sin y}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin^2y=1\\ \sin y\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin y=\frac{\sqrt2}{2}\\ \sin y=-\frac{\sqrt2}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{\pi}{4}+\pi k,k\in Z\\ y=-\frac{\pi}{4}+\pi k,k\in Z\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,k\in Z$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19944

(3) $x = y + \pi + \pi k,\ k \in Z$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z \\ x = \frac{5\pi}{4} + 3\pi k, \ k \in Z\end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z \\ x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi k, \ k \in Z\end{cases}\end{array}\right.$$

16

Ответ: $\{(\frac{5\pi}{4} + 3\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k); (\frac{3\pi}{4} + 3\pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k) \mid k \in Z\}$.

6. $S_{осл} - ?$ | $V_1 = 3$ км/ч; $V_2 = 5$ км/ч; $V_0 = 12$ км/ч

Решение: 1. $3t = 5t - 10 \Rightarrow t = 5$ ч – встретились I и II

2. $12t_1 = 3t_1 + 10$

$9t_1 = 10 \Rightarrow t_1 = \frac{10}{9}$ ч.

$S_1 = V_0 \cdot t_1 = 12 \cdot \frac{10}{9} = \frac{40}{3}$ км $V_1 \cdot t_1 = 3 \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{3}$ км – прошёл I за t_1

$V_2 \cdot t_1 = 5 \cdot \frac{10}{9} = \frac{50}{9}$ км – прошел II за t_1

$\frac{40}{3} - \frac{50}{9} = \frac{120}{9} - \frac{50}{9} = \frac{70}{9}$ км – ρ между осой и II.

3. $12t_2 + 5t_2 = \frac{70}{9}$

$17t_2 = \frac{70}{9}$

$t_2 = \frac{70}{9 \cdot 17}$ ч. $\Rightarrow S_2 = V_0 \cdot \frac{70}{9 \cdot 17} = 12 \cdot \frac{70}{9 \cdot 17} = \frac{280}{3 \cdot 17}$ км

$V_1 \cdot t_2 = 3 \cdot \frac{70}{9 \cdot 17} = \frac{70}{3 \cdot 17}$ км – прошёл I за t_2

$\frac{40}{3} - \frac{280}{3 \cdot 17} = \frac{400}{3 \cdot 17}$ км $V_2 \cdot t_2 = 5 \cdot \frac{70}{9 \cdot 17} = \frac{350}{9 \cdot 17}$ км – прошёл II за t_2

$\frac{40}{3} + \frac{70}{3 \cdot 17} = \frac{750}{3 \cdot 17} = \frac{250}{17}$ км – прошёл I за $t_1 + t_2$

$\frac{250}{17} - \frac{400}{3 \cdot 17} = \frac{350}{3 \cdot 17}$ км – ρ между I и осой.

4. $9t_3 = \frac{350}{3 \cdot 17}$

$t_3 = \frac{350}{3 \cdot 9 \cdot 17}$ ч $\Rightarrow S_3 = 12 \cdot \frac{350}{3 \cdot 9 \cdot 17} = \frac{1400}{9 \cdot 17}$ км

$\frac{50}{9} + \frac{350}{9 \cdot 17} = \frac{1200}{9 \cdot 17} = \frac{400}{3 \cdot 17}$ км – прошёл II за $t_1 + t_2$

$V_2 \cdot t_3 = 5 \cdot \frac{350}{3 \cdot 9 \cdot 17} = \frac{1750}{3 \cdot 9 \cdot 17}$ км – прошел II за t_3

$\frac{400}{3 \cdot 17} + \frac{1750}{3 \cdot 9 \cdot 17} = \frac{5350}{3 \cdot 9 \cdot 17}$ км – прошёл II за $t_1 + t_2 + t_3$

$\frac{400}{3 \cdot 17} + \frac{1400}{9 \cdot 17} = \frac{2600}{9 \cdot 17}$ км

$\frac{2600}{9 \cdot 17} - \frac{5350}{3 \cdot 9 \cdot 17} = \frac{2450}{3 \cdot 9 \cdot 17}$ км – ρ между II и осой

5. $17t_4 = \frac{2450}{3 \cdot 9 \cdot 17}$

$t_4 = \frac{2450}{3 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 17}$

2

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19944

9. При каком $k \in N$ и $k > 2017$ (k-min)

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{(k-1)^2}+\sqrt[3]{k(k-1)}+\sqrt[3]{k}} \in R$$

Решение: 1. $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{(k-1)^2}+\sqrt[3]{k(k-1)}+\sqrt[3]{k}} =$

$$= \frac{1-\sqrt[3]{2}}{1-2} + \frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}{2-3} + \ldots + \frac{\sqrt[3]{k-1}-\sqrt[3]{k}}{k-1-k} =$$

$$= -1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k-1} + \sqrt[3]{k} =$$

$$= -1 + \sqrt[3]{k} \in R \Rightarrow$$ k – куб натурального числа такого, что $k > 2017$ и k-min

След. $k = 13^3 = 2197$

16

Ответ: При $k = 2197$

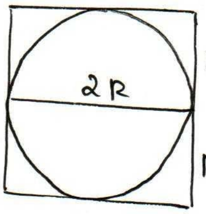
3. Дано:

$R = 258$ м

$\rho \geq 12$ м

Док-ть: размещено не больше 2018 деревьев

Док-во:



1. Пусть $\rho = 12$ м, т.к. чем больше ρ, тем меньше деревьев. Опишем около круга квадрат, тогда $S_{кв} = (2 \cdot 258)^2 = 516^2$
2. Рассмотрим кол-во деревьев, которые располагаются на стороне квадрата, между которыми $\rho = 12$ м.
$\frac{516}{12} + 1 = 44$ дерева на стороне квадрата.
Следовательно по периметру всего квадрата деревьев будет $44 \cdot 44 = 1936$
3. S квадрата $>$ S круга, а max кол-во деревьев на S квадрата 1936, след деревьев (max кол-во) на S круга будет меньше 1936, т.е. меньше 2018.

4