



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 23467

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ имени Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	2	2	2	8	8	0	6	14	2	4	48	сорок восемь	Кип

$$1) A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 5 \cdot (-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4,75 = \frac{\frac{1}{2} + 1}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} + \frac{19}{4} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{20}{4}} + \frac{19}{4} = \frac{6}{20} + \frac{19}{4} = 0,3 + 4,75 = 5,05$$

$$0,6 A = 5,05 \cdot 0,6 = 3,03$$

Ответ: 3,03

$$4) \sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1$$

$$\text{ОДЗ: } x^3 - 3x + 1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1) \quad x^3 - x^2 - x = x(x^2 - x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \quad (1) \end{cases} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

Проверим корни.

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 1 \Rightarrow \text{не подх.}$$

$$D = 1 + 4 = \sqrt{5}^2$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\sqrt{5} \approx 2,3;$$

$$x = 0 < 1 \Rightarrow \text{не подх.}$$

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + 1 = (1,65)^3 - 3 \cdot 1,65 + 1 > 0 \Rightarrow \text{подходит.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



$$9) \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 - 2k + 1} + \sqrt[3]{k^2 - k} + \sqrt[3]{k^2}}$$

Докажем, что каждый член заменим, что

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k^2 - 2k + 1} + \sqrt[3]{k^2 - k} + \sqrt[3]{k^2}} = \frac{\sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{(k-1)^3} - \sqrt[3]{k^3}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k}}{k^3 - k^3 + 3k^2 - 3k - 1} = \frac{\sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k}}{3k^2 - 3k - 1}$$

Значение дроби будет рационально, если, как минимум, $\begin{cases} k-1 = x^3 \\ k = p^3 \end{cases}$, где x, p — рациональн. числа. ОДЗ:

$$p^3 - x^3 = 1 \Rightarrow (p-x)(p^2 + px + 1) = 1. \text{ Из рациональности чисел,}$$

$$\begin{cases} p-x=0 \\ p^2 + px + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p-x=1 \\ p(p+x)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=0 \\ x=-1 \\ x=\frac{1}{2} \\ p=\frac{1}{2} \end{cases}$$

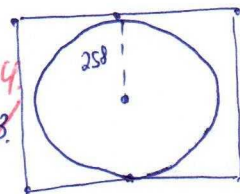
Найдём такие k , что $(k+1)$ -й член равен $\frac{1}{k}$, где k_i — k -ий член (или нет).

2

4) Рассмотрим квадрат, описанный вокруг этой окружности:

Очевидно, что его сторона равна диаметру и равна 516.

Максимальное кол-во деревьев вдоль каждой стороны: $\frac{516}{12} = 43$.



Тогда суммарно деревьев не более $43 \cdot 43$, что меньше 2018.

Очевидно, что в круге сверху деревьев выстроено ещё меньше, потому утверждение доказано.

2

ШИФР 23467

Ответ: $(\frac{\sqrt{11}}{4} + 2\sqrt{11}i; (-1)^n(-\frac{\sqrt{11}}{4}) + \sqrt{11}i); (-\frac{\sqrt{11}}{4} + 2\sqrt{11}i; (-1)^n\frac{\sqrt{11}}{4} + \sqrt{11}i);$

4)

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18}$$

ОДЗ: $11 \geq x$
 $8x - x^2 - 7 \geq 0$
 $9x - x^2 - 18 \geq 0$

$$-x^2 + 8x - 7 = 0$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$D = 64 - 28 = 36$$

$$x_{1/2} = \frac{8 \pm 6}{2} = 7; 1$$

$$9x - x^2 - 18 = 0$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$D = 81 - 72 = 9$$

$$x_{1/2} = \frac{9 \pm 3}{2} = 6; 3$$

$$\sqrt{(x-7)(1-x)} - \sqrt{11-x} \geq \sqrt{(x-3)(x-6)}$$

$$(x-7)(1-x) + (11-x) - 2\sqrt{(x-7)(1-x)(11-x)} \geq (x-3)(x-6)$$

$$-x^2 + 7x + x - 7 + 11 - x - x^2 + 3x + 6x - 18 \geq 2\sqrt{(x-7)(1-x)(11-x)}$$

$$-2x^2 + 16x - 14 \geq 2\sqrt{(x-7)(1-x)(11-x)}$$

$$-(x^2 + 8x + 7) \geq 2\sqrt{(x-7)(1-x)(11-x)}$$

Заметим, что левая часть строго больше нуля.

По ОДЗ, $x^2 - 8x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \in [1; 7]$

Проверим корни уравнения:

$$\sqrt{(1-x)(x-7)} (\sqrt{(1-x)(x-7)} - \sqrt{11-x}) \geq 0$$

$$x=7:$$

$$0 - \sqrt{4} \geq \sqrt{4} \cdot 1$$

$$-2 \geq 2 \text{ — не подходит}$$

$$x=1: 0 - \sqrt{10} \geq \sqrt{10}$$

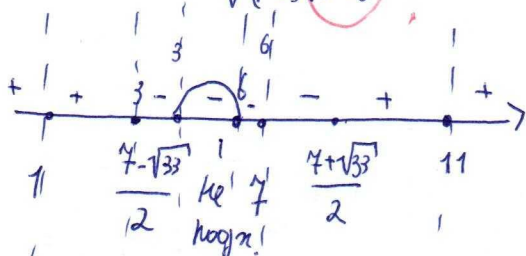
$$\sqrt{(1-x)(7-x)} - \sqrt{11-x} = 0$$

$$7 + x^2 - x - 7x = 11 - x$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$D = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = -2$$

$$x \in [3; 6]: \text{ по ОДЗ;}$$



Ответ: $x \in [1; \frac{7+\sqrt{33}}{2}] \cup [3; 6]$

ШИФР 23467

5) $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$

$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2}$

$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = 1 \cdot (1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2} - \frac{\sin^2 2\alpha}{4}) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$

$= (1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2}) / (1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha) = \frac{2}{3}$, т. к. т. о. 8

2) Пусть x, y, z, p - кол-во грубым кубометров у "Роснефти", "Новатек", "Лукойла" и "Газпром нефти".

$\frac{1}{5} : \frac{1}{2} : \frac{1}{10} \Leftrightarrow 2 : 5 : 1 \Rightarrow$
 $\begin{matrix} 2x \\ 5y \\ z \end{matrix}$

$\begin{cases} 2x = 5y \\ 5z = x \\ 2z = y \end{cases}$

$0,3x = p$

$\begin{cases} x - y - p - z = 8 \\ 5z = x \\ 2x = 5y \\ 2z = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{x}{5} \\ y = \frac{2x}{5} \end{cases} \Rightarrow x - \frac{3x}{5} - \frac{3x}{6} = 8$

$30x - 31x = 240 \Rightarrow x = 240 \Rightarrow p = 240 \cdot 0,3 = 72$

$z = \frac{x}{5} = 48; y = \frac{2x}{5} = 96$

Ответ: $\begin{cases} x = 240 \\ y = 96 \\ z = 48 \\ p = 72 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$ Пусть $\sin y$ и $\cos y$ больше нуля:

$\begin{cases} \sin^2 x - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} = \sin^2 y \\ \cos^2 x - 2 + \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^2 y \end{cases} \Rightarrow 1 - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 4 \Rightarrow \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = 4$

$\frac{1}{t^2} = 4 \Rightarrow t = \pm \frac{1}{2}; \Rightarrow \begin{cases} \cos x \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} \\ 2x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$

Рассмотрим (1): $\sin(\frac{\sqrt{2}}{4}) - \frac{1}{\sin(\frac{\sqrt{2}}{4})} = \sin(y) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2-4}{2\sqrt{2}} = \frac{1-2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin y$

Рассмотрим (2): $\sin(-\frac{\sqrt{2}}{4}) - \frac{1}{\sin(-\frac{\sqrt{2}}{4})} = -(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ (В силу непрерывности $y = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi n$)
 поэтому $y = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi n$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

23467

10) $(4-2\alpha)x^2 + (13\alpha-27)x + 33-13\alpha > 0 \quad \forall \alpha \in (1; 3)$

1) Найдём дискриминант, x_0 , $\frac{f(0)}{4}$:

$$D = 169\alpha^2 + 27^2 - 2 \cdot 27 \cdot 13\alpha - (4-2\alpha)(33-13\alpha) = 169\alpha^2 + 729 - 702\alpha + 52\alpha + 26\alpha^2 - 66\alpha - 132 =$$

$$= 169\alpha^2 + 195\alpha^2 - 716\alpha + 861 = 0 \quad D = 716^2 + 2 \cdot 861 \cdot 195$$

$$4x^2 - 2\alpha x^2 + 13\alpha x - 27x + 33 - 13\alpha > 0$$

$$\alpha(-2x^2 + 13x - 13) > -4x^2 + 27x - 33$$

$$\alpha > \frac{-4x^2 + 27x - 33}{-2x^2 + 13x - 13} \Rightarrow \begin{cases} 3 > \frac{-4x^2 + 27x - 33}{-2x^2 + 13x - 13} \\ -3 < \end{cases}$$

$$-2x^2 + 13x - 13 > 0$$

Если условие выполняется для $\forall x \in (1; 3)$, то $f(x) < 1$

$$1 > \frac{-4x^2 + 27x - 33}{-2x^2 + 13x - 13}$$

$$\frac{-4x^2 + 27x - 33 + 2x^2 - 13x + 13}{-2x^2 + 13x - 13} < 0$$

$$\frac{-2x^2 + 14x - 20}{-2x^2 + 13x - 13} < 0$$

$$-2x^2 + 14x - 20 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$D = 49 - 40 = 9$$

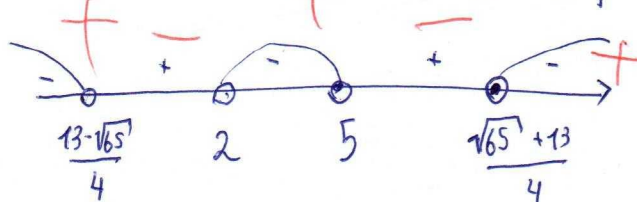
$$x_{1/2} = \frac{7 \pm 3}{2} = 5; 2$$

$$(2-x)(x-5) = 0$$

$$-2x^2 + 13x - 13 = 0$$

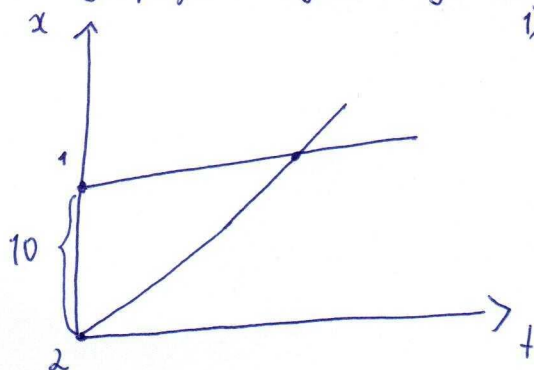
$$D = 169 - 8 \cdot 13 = 65$$

$$x_{1/2} = \frac{-13 \pm \sqrt{65}}{-4} \Leftrightarrow \frac{\pm \sqrt{65} + 13}{4}$$



Ответ: $x \in (-\infty; \frac{13-\sqrt{65}}{4}) \cup (2; 5) \cup (\frac{\sqrt{65}+13}{4}; +\infty)$

6) Изобразим пути путешественников графически:



1) Запишем уравнения их движения:

$$3t + 10 = x_1(t) \quad \text{Они встретятся в момент } t, \text{ такой, что}$$

$$5t = x_2(t)$$

$$3t + 10 = 5t \Rightarrow t = 5;$$

2) скорость ^{осы} ~~пути~~ равна 12, а скорость сближения людей - 8

За время её первого пролёта