

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	1	8	8	10	6	2	-	2	47	сорок семь	

№1
$$A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + (\frac{2}{3})^{-2}} + 4,75 = \frac{\frac{1}{4} + 1}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} + 4,75 =$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{5} + 4,75 = \frac{1}{4} + 4,75 = 5. \quad \checkmark$$

$0,6 A = 0,6 \cdot 5 = 3. \quad \checkmark \quad (19)$

Ответ: 3.

№2 Пусть - И - объём добычи газа «Новатэк»;
Р - объём добычи газа «Роснефть»;
Л - объём добычи газа «Лукойл»;
Г - объём добычи газа «Газпром нефть»

$I : P : L = \frac{1}{5} : \frac{1}{2} : \frac{1}{10} \quad (1)$

$P = 0,3 P \quad (2)$

$P = I + L + G + 8 \quad (3)$

Из (1): $I = \frac{2}{5} P$; $L = \frac{1}{5} P$; подставим в (3)

$P = \frac{2}{5} P + \frac{1}{5} P + \frac{3}{10} P + 8.$

$\frac{1}{10} P = 8 \quad \Rightarrow \quad P = 80$

$G = 30$

$I = 32$

$L = 16$

Ответ: «Новатэк» - 32 млрд. м³; «Роснефть» - 80 млрд. м³;
«Лукойл» - 16 млрд. м³; «Газпром нефть» - 30 млрд. м³.

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



№3 Т.к. расстояние между двумя деревьями не меньше 12 м, то одно дерево занимает площадь равную $S_1 = \pi r^2$, где $r = 12$ м; вся площадь равна $S = \pi R^2$, тогда количество деревьев можно вычислить следующим образом $N = \frac{S}{S_1} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$

$$N = \left(\frac{258}{12}\right)^2 = \left(\frac{43}{2}\right)^2 = \frac{1849}{4} = 462 \frac{1}{4}$$

Т.к. число N - целое, то максимально можно разместить 462 дерева, т.е. меньше 2018, т.е. г.

№4 $\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1$

$$x^3 - 3x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

ОДЗ: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^3 - 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^3 - 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$

$$x^3 - x^2 - x = 0$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x^2 - x - 1 = 0 \quad (2)$$

(1) не подходит по ОДЗ

Рассмотрим (2): $x^2 - x - 1 = 0$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ или } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ - не подходит по ОДЗ}$$

Ответ: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

№5 $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 1 = -2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\frac{-2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 1} = \frac{2}{3}, \text{ т.е. г.}$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



№7 $\sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{8x - x^2 - 18}$

$$(\sqrt{8x - x^2 - 7}) - 2 \cdot \sqrt{8x - x^2 - 7} \cdot \sqrt{11 - x} + (11 - x) \geq 8x - x^2 - 18$$

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} \cdot \sqrt{11 - x} \leq 11 - x$$

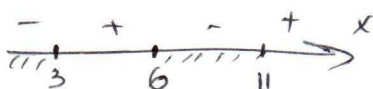
$$(8x - x^2 - 7)(11 - x) \leq (11 - x)^2$$

$$(11 - x)^2 - (11 - x)(8x - x^2 - 7) \geq 0$$

$$(11 - x)(11 - x - 8x + x^2 + 7) \geq 0$$

$$(x - 11)(x^2 - 9x + 18) \leq 0$$

$$(x - 11)(x - 6)(x - 3) \leq 0$$



$$x \in (-\infty; 3] \cup [6; 11]$$

Ответ: $(-\infty; 3] \cup [6; 11]$.

≥ 0?

ОДЗ: $8x - x^2 - 7 \geq 0$

$11 - x \geq 0$

$8x - x^2 - 18 \geq 0$

$x \in -?$

№8
$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases} \quad (*)$$

ОДЗ: $\sin x \neq 0$

$\cos x \neq 0$

$$(*) \begin{cases} \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} = \sin y \\ \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin y \cdot \sin x \\ \cos^2 x - 1 = \cos y \cdot \cos x \end{cases} \quad (**)$$

$$(*) \begin{cases} \sin^2 x - 1 + \cos^2 x - 1 = \sin y \cdot \sin x + \cos y \cdot \cos x \\ \sin^2 x - 1 = \sin y \cdot \sin x \end{cases}$$

~~$(*) \begin{cases} \sin(x+y) = -1 \\ \sin^2 x - 1 = \sin y \cdot \sin x \end{cases} \quad (**)$~~

$$(*) \begin{cases} x + y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \sin^2 x - 1 = \sin y \cdot \sin x \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} y = -\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \sin^2 x - 1 = \sin(-\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin x \end{cases} \quad (**)$$

$$(*) \begin{cases} \sin^2 x - 1 = -\cos x \cdot \sin x \\ y = -\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos x \cdot \sin x \\ y = -\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (**)$$

$$(*) \begin{cases} \cos x (\cos x - \sin x) = 0 \\ y = -\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ y = -\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \sin x = 1 \\ y = -\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = -\frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{\pi}{4} + \pi n; -\frac{3\pi}{4} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

②

10) $(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a > 0 \quad \forall a \in (1; 3).$

I $a=2.$

$$0 \cdot x^2 - x + 33 - 26 > 0$$

$$-x + 7 > 0$$

$$x < 7$$

II $a = \frac{27}{13}; a = 2\frac{1}{13}$

$$(4 - \frac{54}{13})x^2 + 33 - 27 > 0$$

$$-\frac{2}{13}x^2 > -6$$

$$\frac{2}{13}x^2 < 6$$

$$x^2 < 39$$

$$-\sqrt{39} < x < \sqrt{39}$$

III $a \neq 2; a \neq \frac{27}{13}, D \geq 0.$

$$D = (13a-27)^2 - 4(4-2a)(33-13a) = 169a^2 - 702a + 729 - 104a^2 + 472a - 528 = 65a^2 - 230a + 201$$

$$65a^2 - 230a + 201 \geq 0$$

$$D_1 = 13225 - 13065 = 160.$$

$$a_{1,2} = \frac{115 \pm \sqrt{160}}{65}$$

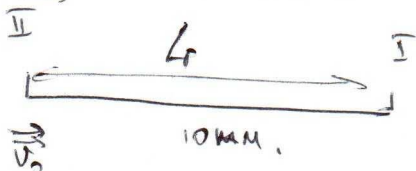
$$a_1 = \frac{115 - \sqrt{160}}{65} > 3.$$

$$a_2 = \frac{115 + \sqrt{160}}{65} < 2.$$

Ответ: при $a \in [\frac{115 - \sqrt{160}}{65}; \frac{115 + \sqrt{160}}{65}] \quad x \in \mathbb{R}$



16)



Перейдем в С.О., связанную с I,
т.е. I - неподвижная С.О.

$$v_0 = 9 \text{ км/ч}$$

$$v_{II} = 2 \text{ км/ч}$$

1) $O \rightarrow I$ $t = \frac{10}{9} \text{ ч}$ $l_1 = 10 \text{ км}$

2) $O \rightarrow II$ $t = \frac{70}{9} \cdot \frac{1}{12} \text{ ч}$ $l_2 = \frac{70}{12} \text{ км}$

3) $O \rightarrow I$ $t = \frac{70}{12} \cdot \frac{1}{9} \text{ ч}$ $l_2 = \frac{70}{12} \text{ км}$

и т.д.

Заметим, что это равносильно следующему:

$$S = v \cdot t, \text{ где } v = v_0; t = \frac{L}{v_{II}} \quad S = \frac{L}{v_{II}} \cdot v_0 \quad S = \frac{10}{2} \cdot 12 = 60 \text{ км}$$

Ответ: $S = 60 \text{ км}$