

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания МГТУ имени Н. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	4	8	—	12	6	16	12	12	78	семьдесят восемь	

N1

$$B = \frac{(3^{10} \cdot \frac{1}{3^4} + 5^4 \cdot \frac{1}{5^4} + 64^{\frac{1}{2}})}{(2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2})} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3+1+4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{8}{10} \Rightarrow A=10 B=8$$

Ответ: 8 ✓ 4

N2.
 Пусть V_1 и V_2 — объемы танкеров, а $*$ — производительность насоса,
 тогда составим систему уравнений, зная, что $t = \frac{V}{x}$, то есть

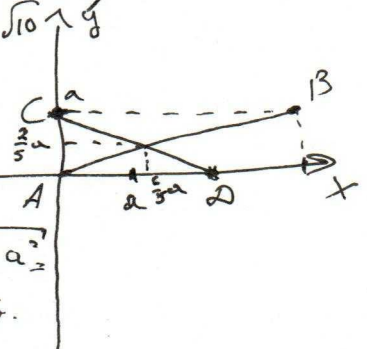
$$\begin{cases} \frac{V_1}{4x} + \frac{V_2}{3 \cdot 4x} = 11 \\ \frac{V_1}{3x} + \frac{V_2}{4 \cdot x} = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{V_1}{x} + \frac{V_2}{3x} = 44 \\ \frac{V_1}{x} + \frac{3V_2}{4x} = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{V_1}{x} + \frac{V_2}{3x} = 44 \\ \frac{3V_2}{4x} - \frac{V_2}{3x} = 10 \end{cases}$$

Отсюда найдем $\frac{V_2}{3x}$; так как $\frac{9V_2 - 4V_2}{12x} = 10$, тогда $\frac{5V_2}{12x} = 10$,
 следовательно $\frac{V_2}{3x} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5V_2}{12x} = 8$ часов.

Ответ: 8 часов. ✓ 4

N3

Возьмем рисунок координатную плоскость и примем AC за a ,
 тогда $CD = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$, $AB = \sqrt{9a^2 + a^2} = a\sqrt{10}$
 найдем их точку пересечения: $y = \frac{1}{3}x$
 $\frac{1}{3}xa = a - \frac{1}{2}xa \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}xa$
 $xa = \frac{6}{5}a, y = \frac{2}{5}a, O(\frac{6}{5}a; \frac{2}{5}a)$
 тогда $AO = \sqrt{\frac{4}{25}a^2 + \frac{36}{25}a^2} = \frac{2a}{5}\sqrt{10}$ и $OC = \sqrt{\frac{9}{25}a^2 + \frac{26}{25}a^2}$
 $= \frac{5}{5}a\sqrt{5}$, $CA = a$, тогда $\angle COA$ можно найти через
 теорему косинусов: $a^2 = \frac{9}{25}a^2 + \frac{4}{25}a^2 - 2 \cos \angle COA \cdot \frac{6}{5}a\sqrt{5} \cdot \frac{2}{5}a\sqrt{10}$
 $a^2 = \frac{9}{25}a^2 + \frac{4}{25}a^2 - 2 \cos \angle COA \cdot \frac{6}{5}a\sqrt{5} \cdot \frac{2}{5}a\sqrt{10} \Rightarrow \frac{6}{5}a^2 = \cos \angle COA \cdot \frac{6}{25} \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot a^2$





ШИФР

30400

тогда. $\frac{6}{5} = \cos \angle COA \cdot \frac{5}{5} \cdot \sqrt{2}$, значит $\angle COA = \frac{\sqrt{2}}{2}$, значит $\angle COA$ равен

45° . Ответ: 45° ✓ (4)

нч

$$(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1) = \frac{1}{4}x$$

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x} - 1 - \frac{1}{4}x$$

Допустим, что $x+1 = t$, тогда

$$(\sqrt{t} - 1)(\sqrt{2-t} + 1) = \frac{1}{4}(t-1). \quad | : (\sqrt{t} - 1) \neq 0, t \neq 0$$

$$\sqrt{2-t} + 1 = \frac{1}{4}(\sqrt{t} + 1) \quad \xrightarrow{+2} \quad 4\sqrt{2-t} - \sqrt{t} = 1 - 4$$

$$2 - t + 1 + 2\sqrt{2-t} = \frac{t}{16} + \frac{\sqrt{t}}{8} + \frac{1}{16} \quad (6(2 - 2\sqrt{2-t} + t) = 9$$

$$16(3 - t + 2\sqrt{2-t}) = t + 2\sqrt{t} + 1.$$

$$2 + t - \frac{9}{16} = 2\sqrt{2t - t^2}$$

$$\left(\frac{23}{16} + t\right)^2 = 4(2t - t^2)$$

$$t^2 + \frac{46}{16}t + \frac{526}{256} = 8t - 4t^2.$$

$$5t^2 + \frac{41}{8}t + \frac{526}{256} = 0$$

$$D = \frac{41^2}{64} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 526}{256} = \frac{1651}{64} - \frac{5 \cdot 526}{64} < 0$$

корней нет, оспаривается

случай, когда $x=0$, тогда.

$$(1-1)(0+1)=0, \text{ что верно}$$

Ответ: 0. ✓ (8)

н6 Велосипедисты едущие $\frac{95}{13+12} = 3$ часа, всё это время ехала девочка, значит она проедет $3 \cdot 15$ км, это 45 км.

Ответ: 45 км. ✓

(12)

N7

$$\sqrt{6x-x^2-5} - \sqrt{7-2x} \geq \sqrt{8x-x^2-12}$$

$$6x-x^2-5 + 7-2x - 2\sqrt{(6x-x^2-5)(7-2x)} \geq 8x-x^2-12$$

$$\cancel{2\sqrt{6x-x^2-5} \geq 0}$$

$$\Leftrightarrow 6x-x^2-5 \geq 0$$

$$x=1$$

$$x=5$$

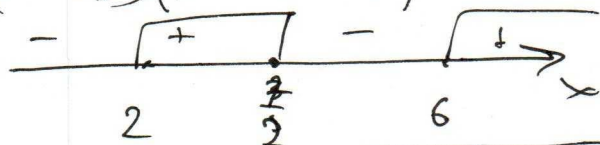
$$14-4x \geq 2\sqrt{(6x-x^2-5)(7-2x)}$$

$$7-2x \geq \sqrt{(6x-x^2-5)(7-2x)}$$

$$(7-2x)^2 \geq (6x-x^2-5)(7-2x)$$

$$(7-2x)(7-2x-6x+x^2+5) \geq 0$$

$$(7-2x)(x^2-8x+12) \geq 0 \rightarrow (7-2x)(x-6)(x-2) \geq 0$$



при этом $\sqrt{6x-x^2-5} \geq \sqrt{7-2x}$, т. е. $x^2-8x+12 \leq 0$,
тогда пример в осях, тогда осях

$$\text{Ответ: } x \in [2; 3.5]$$

$$\{2; 3.5\}$$

(6)

N8

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sin x + \cos y = \cos x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x, \text{ если } \sin x \neq \cos y \end{cases}$$

$$\text{тогда } \begin{cases} \sin x + \cos x = 1 \quad (1) \\ \cos x + \cos y = \sin^2 x \quad (2) \end{cases}$$

(1): возможно 2 случая: связать!

$$I \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad II \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ \cos y = -1$$

$$\Downarrow \\ \cos y = 1$$

Введение в осях?

ОЮЗ:

$$\begin{cases} -x^2+6x-5 \geq 0 \\ 7-2x \geq 0 \\ -x^2+8x-12 \geq 0 \end{cases}$$

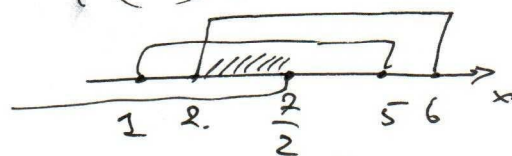
$$7-2x \geq 0$$

$$-x^2+8x-12 \geq 0$$

$$(x-1)(x-5) \leq 0$$

$$x \leq \frac{7}{2}$$

$$(x-6)(x-2) \leq 0$$



$$x \in [2; \frac{3}{2}]$$



ШИФР

30400

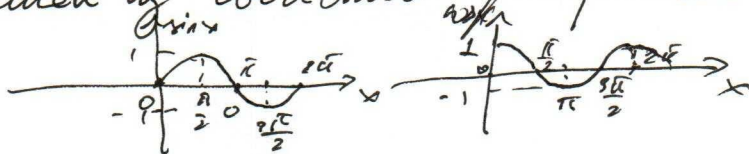
переходим в тригонометрическую систему:

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = \cos x \\ \cos x + \cos y = \sin^2 x \end{cases} \xrightarrow{I} \begin{cases} 10 + 1 = 1 \\ 1 - 1 = 0 \end{cases} \text{ это верно}$$

$$\xrightarrow{II} \begin{cases} 1 - 1 = 0 \\ 0 + 1 = 1 \end{cases} \text{ это верно}$$

условие $\sin x \geq \cos y$ для точек выполняется

$\cos x + \sin x = 1$ имеет только 2 решения, которые 2 наших и свойства графиков $\sin x$ и $\cos x$



$$\begin{cases} \cos y = 1 \\ \cos x = 0 \\ \cos y = -1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \begin{cases} y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $(2\pi n; \pi + 2\pi k); (\frac{\pi}{2} + \pi n; 2\pi k), k, n \in \mathbb{Z}$ ✓

№ 9

$$\frac{1}{(x+2014)(x+2015)} + \frac{1}{(x+2015)(x+2016)} + \frac{1}{(x+2016)(x+2017)} + \frac{1}{(x+2017)(x+2018)} = \frac{1}{999999}$$

Пусть $x+2016 = u$, тогда.

$$u(u+1)(u+2) + (u+1)(u+2)(u-2) + (u+2)(u-2)(u-1) + (u-2)(u-2)u = \frac{u(u^2-1)(u^2-4)}{999999}$$

при этом $x \neq -2014; x \neq -2015; x \neq -2016; x \neq -2017; x \neq -2018$

$$\underbrace{u^3 + 3u^2 + 2u} + \underbrace{u^3 + u^2 - 4u - 4} + \underbrace{u^3 - u^2 - 4u + 4} + \underbrace{u^3 - 3u^2 + 2u} = \frac{u(u^2-1)(u^2-4)}{999999}$$

$$4u^3 - 4u = \frac{u(u^2-1)(u^2-4)}{999999}$$

$$4000000 - 4 = u^2 - 4$$

$$u^2 = 4000000$$

$u = 2000 \Rightarrow$ сделаем обратную замену, тогда $x+2016 = 2000$
 $x = -16$?

Ответ: -16



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

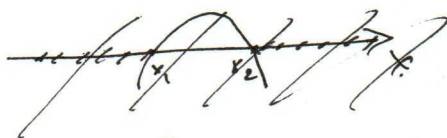


N10

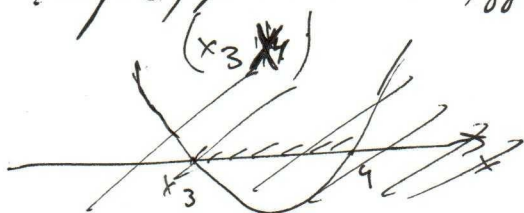
$$(2a-6)x^2 + (32-10a)x - a - 8 < 0, \quad a \in (2; 4)$$

при каких x это верно?

Если $a \in (2; 3)$, то
это парабола ветвями
вниз, решения будут $(x_1; x_2)$



Если $a \in (3; 4)$, то
это парабола ветвями
вверх, решения будут $(x_3; x_4)$



Раскроем скобки найдём зависимость a от x :

$$2ax^2 - 6x^2 + 32x - 10ax - a - 8 < 0$$

$$(2x^2 - 10x + 1)a < 6x^2 - 32x + 8$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 10x + 1 > 0 \\ a < \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 10x + 1 < 0 \\ a > \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x + 1} \end{cases}$$

Значит
лучше
правее
то есть
или равно

Значит
лучше
правее
то есть
или равно

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{10 - 6\sqrt{3}}{4} \\ x_2 &= \frac{10 + 6\sqrt{3}}{4} \\ (x - \frac{10 - 6\sqrt{3}}{4})(x - \frac{10 + 6\sqrt{3}}{4}) &> 0 \\ 6x^2 - 32x + 8 &\geq 8x^2 - 40x - 4 \quad (1) \\ (x - \frac{10 - 6\sqrt{3}}{4})(x - \frac{10 + 6\sqrt{3}}{4}) &< 0 \\ 6x^2 - 32x + 8 &\geq 4x^2 - 20x - 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1): 2x^2 - 8x - 12 &\leq 0 \quad \checkmark \\ \Delta < 0? & \text{Верно!} \\ (2): 2x^2 - 12x + 10 &\geq 0 \\ 2(x-1)(x-5) &\geq 0 \quad \checkmark \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x \in (\frac{10-6\sqrt{3}}{4}, \frac{10+6\sqrt{3}}{4}) \\ x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty) \\ x \in (-\infty, \frac{10-6\sqrt{3}}{4}] \cup (\frac{10+6\sqrt{3}}{4}, +\infty) \end{cases}$$

ШИФР

30400

упрости систему и графическая: $\frac{10-6\sqrt{3}}{4}$ и 1;

$$\frac{10+6\sqrt{3}}{4} \text{ и } 5.$$

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{5-3\sqrt{3}}{2}, \frac{5+3\sqrt{3}}{2} \right) \\ x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty) \\ x \in \left(-\infty; \frac{5-3\sqrt{3}}{2} \right) \cup \left(\frac{5+3\sqrt{3}}{2}; +\infty \right) \end{cases}$$

Получим образцы

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{5-3\sqrt{3}}{2}, 1 \right] \cup \left[5, \frac{5+3\sqrt{3}}{2} \right) \\ x \in \left(-\infty; \frac{5-3\sqrt{3}}{2} \right) \cup \left(\frac{5+3\sqrt{3}}{2}; +\infty \right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$$

Ответ: $\underline{(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)}$?

NS

$$[2-\sqrt{10}; 1] \cup [5; 2+\sqrt{10}]$$

(12)

$$5-3\sqrt{3} < 2$$

$$3 < 3\sqrt{3}$$

$$5+3\sqrt{3} > 10$$

$$3\sqrt{3} < 5$$

$$\sqrt{3} < \frac{5}{3}$$

$$3 < \frac{25}{9}$$

$$27 > 25$$