

ШИФР 31067

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 10 февраля 2018

Площадка написания МГТУ им. Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	4	-	0	12	6	16	-	14	60	шестьдесят	

1) $(\frac{1}{3})^{-10} \cdot 27^{-3} = 3^{10} \cdot 3^{-9} = 3$; 2) $(\frac{1}{5})^{-4} \cdot 25^{-2} = 5^4 \cdot 5^{-4} = 1$; 3) $(64^{-\frac{1}{3}})^{-3} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$
 4) $(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{4-3} = 6$
 5) $(2,017)^0 = 1$; 6) $B = \frac{3+1+4}{6} \cdot 1 \cdot \sqrt{0,36} = \frac{8}{6} \cdot 0,6 = 0,8$
 6) $A = 10$ $B = 8$
 Ответ: 8. ✓ (4)

№2.
 ν -производительность одного насоса, A_1 и A_2 — ёмкости первого и второго танкеров соответственно. Тогда из условия следует, что:

$$\begin{cases} 11 \cdot 4 \nu = A_1 + \frac{A_2}{3} & (1) \\ \frac{A_1}{3\nu} + \frac{\frac{1}{4}A_2}{\nu} = 18 & (2) \end{cases}$$
 Выразим из уравнения (2) A_1 через ν и A_2 .

$$\frac{A_1}{3\nu} + \frac{A_2}{4\nu} = \frac{4A_1 + 3A_2}{12\nu} = 18; \quad A_1 = (18 \cdot 12\nu - 3A_2) / 4 = \frac{216\nu - 3A_2}{4}$$

Подставим полученную грубую вместо A_1 в уравнение (1)

$$44\nu = \frac{216\nu - 3A_2}{4} + \frac{A_2}{3} = \frac{648\nu - 5A_2}{12}; \quad 528\nu = 648\nu - 5A_2; \quad 5A_2 = 120\nu; \quad A_2 = 24\nu$$

Найдём искомое время t : $t = \frac{A_2}{3\nu} = \frac{24\nu}{3\nu} = 8$. (4) ✓

Ответ: за 8 часов три насоса могут наполнить второй танкер.

~~$(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = 1-x$; $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = \frac{1}{1-x}$~~



ШИФР

31067

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



№3.

Воспользуемся методом координат. $A(0;0)$, вектора $\vec{AD}$ и $\vec{AC}$ задают оси OX и OY соответственно. Тогда (если брать сторону квадрата за 1) координаты точек таковы: $C(0;1)$, $B(3;1)$, $D(2;0)$. Найдем уравнения прямых AB и CD .
 $A(0;0)$, $B(3;1)$. $\begin{cases} 0 = 0k + b \\ 1 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow y_{AB} = \frac{1}{3}x$.

$$C(0;1), D(2;0). \begin{cases} 1 = 0k + b \\ 0 = 2k + b \end{cases} \Rightarrow y_{CD} = -0,5x + 1$$

Очевидно, точка пересечения AB и CD (назовем её O) лежит на обеих прямых.

$$y_{AB} = y_{CD}; \frac{1}{3}x = -\frac{1}{2}x + 1; \frac{2}{6}x + \frac{3}{6}x = 1; x = 1,2; y = 1,2 \cdot \frac{1}{3} = 0,4. O(1,2; 0,4)$$

$$AO^2 = x_{AO}^2 + y_{AO}^2 = 1,44 + 0,16 = 1,6; CO^2 = x_{CO}^2 + (1 - y_{CO})^2 = 1,44 + 0,36 = 1,8.$$

$$\text{В } \triangle AOC \text{ по теореме косинусов } AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2AO \cdot OC \cdot \cos \angle AOC; \cos \angle AOC = \frac{AO^2 + OC^2 - AC^2}{2AO \cdot OC} = \frac{1,6 + 1,8 - 1}{2 \cdot \sqrt{1,6} \cdot \sqrt{1,8}} = \frac{2,4}{2 \cdot 1,2 \cdot 1,34} = \frac{1,2}{1,608} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \angle AOC = 45^\circ - \text{искомый } \angle AB \wedge CD$$

Ответ: 45° . ✓ (4)

№6.

1) $75 / (12 + 13) = 3$ (ч) - время до встречи. Очевидно, собака будет бежать столько же времени.

2) $3 \cdot 15 = 45$ (км) - итоговое расстояние. Задача про муху, но в другой оболочке ☺

Ответ: 45 км. ✓ (12)

№7.

$$\sqrt{-x^2 + 6x - 5} - \sqrt{7 - 2x} \geq \sqrt{-x^2 + 8x - 12}; \sqrt{-(x-1)(x-5)} - \sqrt{-2(x-3,5)} \geq \sqrt{-(x-2)(x-6)}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \in [1; 5] \\ x \in (-\infty; 3,5] \\ x \in [2; 6] \end{cases} \quad x \in [2; 3,5]$$

$$\sqrt{-(x-1)(x-5)} - \sqrt{-(x-2)(x-6)} \geq \sqrt{7-2x}; (\sqrt{-(x-1)(x-5)} - \sqrt{-(x-2)(x-6)})^2 \geq (\sqrt{7-2x})^2, \text{ так как обе части неотрицательны. } - ?$$

$$-x^2 + 6x - 5 - 2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)} - (-x^2 + 8x - 12) \geq 7 - 2x$$

$$7 - 2x - 2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)} \geq 7 - 2x$$

$$-2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)} \geq 0; \sqrt{(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)} \leq 0.$$

корень - число неотрицательное, значит $\sqrt{(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)} = 0$

$$x \in [2; 3,5]$$

$$x = 2.$$

$$x = \{1; 2; 5; 6\}.$$

Ответ: 2, 3, 5. (6)



№5.

$$\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 85^\circ = 1$$

Воспользуемся формулой $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ и уберем обе части на $\operatorname{ctg} 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ$

$$\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 85^\circ = \operatorname{ctg} 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ$$

$$\frac{\sin 35^\circ \cdot \sin 85^\circ}{\cos 35^\circ \cdot \cos 85^\circ} = \frac{\cos 15^\circ \cdot \cos 25^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ}$$

Воспользуемся формулами $\cos(x+y) = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ и

$$\cos(x-y) = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\frac{-\frac{1}{2} \cos 70^\circ}{\frac{1}{2} \cos 170^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} \cos 50^\circ}{-\frac{1}{2} \cos 10^\circ}; \cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ = \cos 170^\circ \cdot \cos 50^\circ$$

$$\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ$$

$$\cos 70^\circ \cos 10^\circ - \cos 170^\circ \cos 50^\circ = \cos 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 10^\circ \cos 50^\circ =$$

$$= \cos 10^\circ (\cos 70^\circ + \cos 50^\circ) = 0$$

К сожалению, $\cos 10^\circ \neq 0$ и $\cos 70^\circ \neq -\cos 50^\circ$. Выходит, что тождество доказать невозможно, так как оно неверно! ? $\emptyset$

№8.

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x \end{cases}$$

Почленно сложим

$$\cos x + \cos y + \sin x - \cos y = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\checkmark \sin x + \cos x = 1 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos 45^\circ \cos x + \sin 45^\circ \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos(45^\circ - x) = \cos 45^\circ$$

$$\begin{cases} x = 0^\circ + 2\pi n \\ x = 90^\circ + 2\pi n \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$1) \text{ При } x = 2\pi n (n \in \mathbb{Z}) \sqrt{1 - \cos y} = 1; \cos y = 0; y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \text{ При } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z}) \sqrt{1 - \cos y} = 0; \cos y = 1; y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 31067

Ответ на номер 8: $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, где $k, k \in \mathbb{Z}$;
 $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k)$, где $k, k \in \mathbb{Z}$. ✓

№10.

$$(2a-6)x^2 + (32-10a)x - a-8 < 0$$

$$2x^2a - 6x^2 + 32x - 10xa - a - 8 < 0$$

$$a(2x^2 - 10x - 1) < 6x^2 - 32x + 8$$

$$\frac{a}{2}(2x^2 - 10x - 1) < 3x^2 - 16x + 4$$

Выясним, при каких x $2x^2 - 10x - 1 = 0$. $\frac{1}{4}D = 5^2 + 2 = 27$; $x_0 = \frac{5 \pm \sqrt{27}}{2}$

Подставим эти корни в трёхчлен из первой части из правой части

$$1) 3\left(\frac{5+\sqrt{27}}{2}\right)^2 - 16\left(\frac{5+\sqrt{27}}{2}\right) + 4 = \frac{3(25+10\sqrt{27}+27) - 8(5+\sqrt{27}) + 4}{4} =$$

$$= \frac{3(52+10\sqrt{27}) - 32(5+\sqrt{27}) + 4}{4} = \frac{156 + 30\sqrt{27} - 160 - 32\sqrt{27} + 4}{4} =$$

$$= \frac{-48 - 6\sqrt{3}}{4} < 0, \text{ значит при } x = \frac{5+\sqrt{27}}{2} \text{ нер-во неверно}$$

$$2) 3\left(\frac{5-\sqrt{27}}{2}\right)^2 - 16\left(\frac{5-\sqrt{27}}{2}\right) + 4 = \frac{3(25-10\sqrt{27}+27) - 32(5-\sqrt{27}) + 4}{4} = \frac{-48 + 6\sqrt{3}}{4}$$

$1 < \sqrt{3} < 2$; $6 < 6\sqrt{3} < 12$, значит $\frac{-48 + 6\sqrt{3}}{4} < 0$ и при $x = \frac{5-\sqrt{27}}{2}$ нер-во неверно.

Значит $2x^2 - 10x - 1$ и мы можем делить обе части на это выражение.

$$I \ x \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{27}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{27}}{2}; +\infty\right), 2x^2 - 10x - 1 > 0$$

$$\left\{ \frac{a}{2} < \frac{3x^2 - 16x + 4}{2x^2 - 10x - 1} \right. \quad \frac{3x^2 - 16x + 4}{2x^2 - 10x - 1} \geq 2; 3x^2 - 16x + 4 \geq 2x^2 - 20x - 2; x^2 - 4x - 6 \leq 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) - 10 \leq 0; (x-2)^2 \leq 10; 2 - \sqrt{10} \leq x \leq 2 + \sqrt{10}$$

$$\frac{5-\sqrt{27}}{2} - (2-\sqrt{10}) = \frac{5-\sqrt{27}-4+2\sqrt{10}}{2} = \frac{1+2\sqrt{10}-\sqrt{27}}{2} = \frac{1+\sqrt{40}-\sqrt{27}}{2} > 0, \text{ значит } \frac{5-\sqrt{27}}{2} > 2-\sqrt{10}$$

$$\frac{5+\sqrt{27}}{2} - (2+\sqrt{10}) = \frac{5+\sqrt{27}-4-2\sqrt{10}}{2} = \frac{1+\sqrt{27}-\sqrt{40}}{2} < 0, \text{ значит так как}$$

$$5,1 < \sqrt{27} < 5,2; 6,3 < \sqrt{40} < 6,4, \text{ значит } \frac{5+\sqrt{27}}{2} < 2+\sqrt{10}$$

$$\left\{ x \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{27}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{27}}{2}; +\infty\right) \right. \quad x \in \left[2-\sqrt{10}; \frac{5-\sqrt{27}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{27}}{2}; 2+\sqrt{10}\right]$$

$$\left\{ x \in \left[2-\sqrt{10}; 2+\sqrt{10}\right] \right.$$

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31067

~~II $x \in \left(\frac{5-\sqrt{27}}{2}, \frac{5+\sqrt{27}}{2} \right)$~~
 ~~$\frac{3x^2-16x+4}{2x^2-10x-1}$~~

II $x \in \left(\frac{5-\sqrt{27}}{2}, \frac{5+\sqrt{27}}{2} \right), 2x^2-10x-1 < 0$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} > \frac{3x^2-16x+4}{2x^2-10x-1} \\ 1 < \frac{a}{2} < 2 \end{cases}$$

$\frac{3x^2-16x+4}{2x^2-10x-1} \leq 1; 3x^2-16x+4 \geq 2x^2-10x-1; x^2-6x+5 \geq 0; (x-1)(x-5) \geq 0$
 $\frac{5-\sqrt{27}}{2} - 1 = \frac{3-3\sqrt{3}}{2} < 0$, значит $\frac{5-\sqrt{27}}{2} < 1$

$\frac{5+\sqrt{27}}{2} - 5 = \frac{\sqrt{27}-\sqrt{25}}{2} > 0$, значит $\frac{5+\sqrt{27}}{2} > 5$

$x \in \left(\frac{5-\sqrt{27}}{2}, \frac{5+\sqrt{27}}{2} \right)$

$x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$

$x \in \left(\frac{5-\sqrt{27}}{2}, 1 \right] \cup \left[5, \frac{5+\sqrt{27}}{2} \right)$

$$\begin{cases} \text{I} \\ \text{II} \end{cases} \quad x \in \left[2-\sqrt{10}, \frac{5-\sqrt{27}}{2} \right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{27}}{2}, 1 \right] \cup \left[5, \frac{5+\sqrt{27}}{2} \right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{27}}{2}, 2+\sqrt{10} \right]$$

$$\text{Ответ: } \left[2-\sqrt{10}, \frac{5-\sqrt{27}}{2} \right] \cup \left[\frac{5-\sqrt{27}}{2}, 1 \right] \cup \left[5, \frac{5+\sqrt{27}}{2} \right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{27}}{2}, 2+\sqrt{10} \right].$$

(14)

?