ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31130

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4		4	2	8		10	16	16	0	56	пятьдесят шесть	

1.

$$B=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+(0,2)^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}\cdot(2,017)^0\cdot\sqrt{0,36}=$$

$$=\frac{3^{+10}\cdot 3^{-9}+5^4\cdot 5^{-4}+64^{\frac{1}{3}}}{4+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}\cdot 1\cdot 0,6=$$

$$=\frac{3+1+4}{4+2\sqrt{1}}\cdot\frac{3}{5}=\frac{8}{\cancel{6}_2}\cdot\frac{\cancel{3}^1}{5}=\frac{8}{10};$$

$$0,1\cdot A=B=\frac{8}{10};$$

$$A=8$$

Ответ: $A=8$ ✓ 4

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31130

7. $\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{7-2x}\geq\sqrt{8x-x^2-12}$

$\sqrt{-(x^2-6x+5)}-\sqrt{7-2x}\geq\sqrt{-(x^2-8x+12)}$

возведем в квадрат обе части:

$\cancel{x^2}-\cancel{6x}+\cancel{5}-2\sqrt{(x^2-6x+5)(2x-7)}+\cancel{7}-\cancel{2x}\geq\cancel{x^2}-\cancel{8x}+\cancel{12}$

$-2\sqrt{(x^2-6x+5)(2x-7)}\geq 0$

$\sqrt{(x^2-6x+5)(2x-7)}\leq 0$

То есть $(x-1)(x-5)(2x-7)=0$

$x=1,\ x=5,\ x=3.5$

Но при $x=1$ $\sqrt{8x-x^2-15}$ не определен в действ. числах, поскольку $8-1-15=-8<0$

При $x=5$ $\sqrt{7-2x}$ не определен в действ. числах, поскольку $7-2\cdot5=-3<0$

При $x=3.5$: $\sqrt{6\cdot3{,}5-(3{,}5)^2-5}-\sqrt{7-2\cdot3{,}5}\geq\sqrt{28-12-(3{,}5)^2}\leftrightarrow\sqrt{16-(3{,}5)^2}\geq\sqrt{16-(3{,}5)^2}$, то есть верно

6 Ответ: $x=3{,}5$ потеряно решение $x=2$

ШИФР 31130

5.

$$\operatorname{tg}15^\circ \cdot \operatorname{tg}85^\circ \cdot \operatorname{tg}25^\circ \cdot \operatorname{tg}35^\circ = 1$$

$$\frac{\sin 15^\circ \cdot \sin 85^\circ}{\cos 15^\circ \cdot \cos 85^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ}{\cos 25^\circ \cdot \cos 35^\circ} = 1$$

$$\sin(a) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-\beta) - \cos(a+\beta)\right)$$

$$\cos(a) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-\beta) + \cos(a+\beta)\right)$$

$\cancel{\frac{1}{2}(\cos}$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\cos 70^\circ - \cos 100^\circ\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\cos 10^\circ - \cos 60^\circ\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos 100^\circ - \cos 70^\circ\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\cos 60^\circ - \cos 10^\circ\right)} =$$

$$= \frac{1}{1} \frac{\cancel{(\cos 70^\circ - \cos 100^\circ)} \cdot \cancel{\cos(10^\circ - \cos 60^\circ)}}{-1 \cdot \cancel{(\cos 70^\circ - \cos 100^\circ)} \cdot (-1) \cdot \cancel{(\cos(10^\circ) - \cos(60^\circ))}} = 1,$$

ч.т.д.

✓ 8

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31130

4.

$$\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\frac{1}{4}x$$

~~Пусть $1+x=a$, тогда~~

$\cancel{(a-1)(}$

Умножим обе части на $\sqrt{1+x}+1$, тогда

$$\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\frac{1}{4}x\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

$$(1+x-1)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\frac{1}{4}x\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

$$x\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\frac{1}{4}x\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

$$x\left(\sqrt{1-x}+1-\frac{\sqrt{1+x}}{4}-\frac{1}{4}\right)=0$$

$x=0$ или $\sqrt{1-x}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{4}=-\dfrac{3}{4}$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{4}-\sqrt{1-x}=\frac{3}{4}\quad\Big|\cdot 4$$

$$\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x}=3;$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31130

$\sqrt{1+x}=3+4\sqrt{1-x}$;

$1+x=9+24\sqrt{1-x}+16(1-x)$

$x-8-16+16x=24\sqrt{1-x}$

$48\cdot 17=$
$=480+48\cdot 7=$
$=480+280+56=$
$=816$

$17x-24=24\sqrt{1-x}$

$289x^2-2\cdot 17\cdot 24\cdot x+\cancel{576}=\cancel{576}-576x$

$289x^2-816x+576x=0$

$3+4\sqrt{7}$

$289x^2-240x=0$

$x(289x-240)=0$

$x=0$ или $289x=240$

$x=\frac{240}{289}$

$\frac{240}{289}$ входит в ОДЗ, т.к

ОДЗ: $x\in[-1;1]$, а $0<\frac{240}{289}<1$

Ответ: $0;\ \cancel{\frac{240}{289}}$

2

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР B1130

8.
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x, \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x, \\ |\sin x - \cos y| = \cos^2 x \end{cases}$$

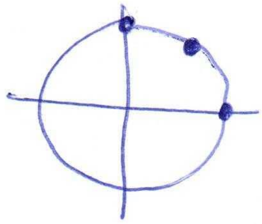
$\sin x - \cos y \geq \cos x$ иначе $\cos x$ не определен,

Тогда

$$\cos x + \sin x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$



$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k;$ или $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi t;$

$x = 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi t,\ t \in \mathbb{Z}$

Если $x = 2\pi k\ (k \in \mathbb{Z})$, то

$$\cos(2\pi) + \cos y = \sin^2(2\pi)$$

$$1 + \cos y = 0;$$

$$\cos y = -1$$

$$y = \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$$

Если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi t\ (t \in \mathbb{Z})$, то

$$\cos\frac{\pi}{2} + \cos y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos y = 1$$

$$y = 2\pi r,\ r \in \mathbb{Z}$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31130

В обоих случаях $\sqrt{\sin x-\cos y}>0$, то есть оба варианта подходят.

Ответ: $\left\{ \left(2\pi k;\ \pi+2\pi m\right);\ \left(\frac{\pi}{2}+2\pi t;\ 2\pi r\right) \middle|\ k, m, t, r \in \mathbb{Z} \right\}$

10

9. $$\frac{1}{(x+2014)(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)(x+2017)}+\frac{1}{(x+2017)(x+2018)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{1}{x+2014}-\frac{1}{x+2015}=\frac{x+2015-x-2014}{(x+2014)(x+2015)}=\frac{1}{(x+2014)(x+2015)}$$ и

вообще

$$\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$$, поэтому перепишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{1}{x+2014}-\frac{1}{x+2015}+\frac{1}{x+2015}-\frac{1}{x+2016}+\frac{1}{x+2016}-\frac{1}{x+2017}+\frac{1}{x+2017}-\frac{1}{x+2018}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{1}{x+2014}-\frac{1}{x+2018}=\frac{1}{999999}$$

ГАЗПРОМ
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31130

$$\frac{x+2018 - x-2014}{(x+2014)(x+2018)} = \frac{1}{999999}$$

$$\frac{4}{(x+2014)(x+2018)} = \frac{1}{999999}$$

$$(x+2014)(x+2018) = 4\cdot 10^6 - 4$$

$$x^2+4032x+(2000+14)(2000+18) = 4\cdot 10^6-4$$

$$x^2+4032x+\cancel{4\cdot 10^6}+36000+28000+252=\cancel{4\cdot 10^6}-4$$

$$x^2+4032x+64004+252=0$$

$$x^2+4032x+64256=0$$

$$D=(4032)^2-4\cdot 1\cdot 64256=$$

$$=(4000+32)^2-\cancel{4\cdot 160}\ \cancel{2}\cdot 4\cdot 16064\cdot 4=$$

$$=16\cdot 10^6+8000\cdot 32+1024-64\cdot 4016=$$

$$=16\cdot 10^6+2^8\cdot 1000+2^{10}-2^6\cdot 4016=$$

$$=2^4\left(10^6+2^4\cdot 10^3+2^6-2^2\cdot 4016\right)$$

$$x_1=\frac{-4032+\sqrt{2^4\left(10^6+2^4\cdot 10^3+2^6-2^2\cdot 4016\right)}}{2}=2\sqrt{10^6+2^4\cdot 10^3+2^6-2^2\cdot 4016}-2016=$$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31130

$$= 2\sqrt{10^6 + 16000 + 64 - 16064} - 2016 =$$

$$= 2\sqrt{10^6} - 2016 = -16$$

$$x_2 = \frac{-4032 - 2^2\sqrt{10^6}}{2} =$$

$$= -2016 - 2\cdot 10^3 = -4016$$

Ответ: $-4016, -16$

16

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31130

3. Отметим точку пересечения за M, тогда

$tg(\angle BAD)=\frac{1}{3}$, $tg(\angle CDA)=\frac{1}{2}$

$tg(\angle BAD+\angle CDA)=tg(\angle BMD)$, так как $\angle BMD$ – внешний угол ~~к~~ ~~треу~~ треугольнику MAD.

$$tg(\angle BAD+\angle CDA)=\frac{tg\angle BAD+tg\angle CDA}{1-tg\angle BAD\cdot tg\angle CDA}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1;$$

И так как явно $\angle BMD\neq 225^\circ$ ~~острый~~, то $\angle BMD=45^\circ$ ($tg45^\circ=1$).

Ответ: 45°. ✓ 4

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31130

10. $(2a-6)x^2+(32-10a)x-a-8<0$

~~Рассмотрим тот случай, когда $2a-6<0$,~~

~~То есть $a\in(2;3)$~~

~~Т.к $2a-6<0$, то график ветви параболы~~

~~функции $f(x)=(2a-6)x^2+(32-10a)x-(a+8)$ будут~~

~~направлены вниз, и дискриминант должен быть~~

~~отрицательным.~~

$$D=\frac{(32-10a)^2-4(2a-6)(a+8)}{4(a-3)}=$$

$$=\frac{4(16-5a)^2-4(2a-6)(a+8)}{4(a-3)}=$$

$$=\frac{(16-5a)^2-(2a-6)(a+8)}{a-3}=\frac{256-160a+25a^2-(2a^2+16a-6a-48)}{a-3}=$$

$$=\frac{25a^2-160a+256-2a^2-10a+48}{a-3}=$$

$$=\frac{23a^2-170a+304}{a-3}$$

0

~~Т.к. знаменатель отрицателен, то числитель должен быть~~