

Класс 11

Вариант 12

Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	4	1	8	4	12	16	16	10	79	семьдесят девять	

10) $(2a-6)x^2 + (32-10a)x - a - 8 < 0$

$a(2x^2 - 10x - 1) < 6x^2 - 32x + 8$

$$\begin{cases} a < \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1} & (1) \\ 2x^2 - 10x - 1 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2}) \cup (4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1} & (2) \\ 2x^2 - 10x - 1 < 0 \Rightarrow x \in (4 - \frac{3\sqrt{3}}{2}; 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

для (1) берем макс. знач. a : $4 \Rightarrow \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1} \geq 4$

для (2) берем мин. знач. a : $2 \Rightarrow \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1} \leq 2$

(1) $x^2 - 4x - 6 \leq 0 \Rightarrow x \in [2 - \sqrt{10}; 2 + \sqrt{10}]$

$2 - \sqrt{10} \quad 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad 2 + \sqrt{10} \quad 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$
 $\Rightarrow x \in [2 - \sqrt{10}; 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2})$

(2) $x^2 - 6x + 5 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$

$1 \quad 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad 5 \quad 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$
 $\Rightarrow x \in [5; 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2})$

$x \in [2 - \sqrt{10}; 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2}) \cup [5; 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2})$

теперь рассмотрим

$x = 4 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ - не покр., $4 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ - не покр.

Ответ: $x \in [2 - \sqrt{10}; 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2}) \cup [5; 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2})$

10



$$1) B = \frac{3^{10} \cdot 3^{-9} + 5^4 \cdot 5^{-4} + 64^{\frac{1}{3}}}{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{1}} \cdot 1 \cdot 0,6 =$$

$$= \frac{3 + 1 + 4}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$0,1 \cdot A = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{A}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow A = 8$$

Ответ: $A = 8$ ✓ (4)

2) пусть x - произв. одного насоса

y - объем 1 танкера

z - объем второго

$$\Rightarrow \text{из условий: } \begin{cases} 18 = \frac{y}{3x} + \frac{z}{4x} \\ 11 = \frac{y}{4x} + \frac{z}{12x} \end{cases}$$

предполагается найти: $t = \frac{z}{3x}$

$$\text{пусть } \frac{y}{x} = \alpha; \frac{z}{x} = \beta \Rightarrow t = \frac{\beta}{3};$$

$$\begin{cases} 18 = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{4} = \frac{4\alpha + 3\beta}{12} \\ 11 = \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{12} = \frac{3\alpha + \beta}{12} \end{cases}$$

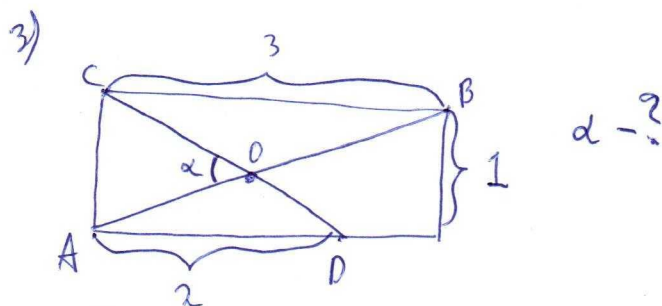
$$\begin{cases} 216 = 4\alpha + 3\beta \\ 132 = 3\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 216 = 4\alpha + 3\beta \\ 176 = 4\alpha + \frac{4}{3}\beta \end{cases}$$

т.к. надо только β , то вычтем
одно уравн. из другого:

$$40 = 3\beta - \frac{4}{3}\beta = \frac{5\beta}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{120}{5} = 24 \Rightarrow t = \frac{\beta}{3} = 8$$

Ответ: за 8 часов ✓ (4)



Решение: $\triangle COB \cong \triangle DOA$ по трем углам ($\angle COB = \angle DOA$ как вертикал., $\angle OCB = \angle ODA$, $\angle OBC = \angle OAD$ как накрест лежащие при $CB \parallel AD$ и секущих CO и AO соответственно.) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow CO = 3x; OD = 2x; OB = 3y; OA = 2y;$$

$$CD^2 = AD^2 + CA^2 = 5 \Rightarrow CD = \sqrt{5}, \text{ аналогично } AB = \sqrt{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CO = \frac{3}{5} \cdot CP = \frac{3}{5}; AO = \frac{2}{5} \cdot AB = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

по т. кос.:

$$AC^2 = CO^2 + AO^2 - 2 \cdot CO \cdot AO \cdot \cos \alpha$$

$$1 = \frac{9}{5} + \frac{8}{5} - 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{12}{5} = \frac{12\sqrt{2}}{5} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$$

Ответ: $\alpha = 45^\circ$ ✓ (4)



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

31944

N5

$$\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 85^\circ = 1$$

$$\cancel{\sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 85^\circ}$$

$$\frac{\sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 85^\circ}{\cos 15^\circ \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 35^\circ \cdot \cos 85^\circ} =$$

$$= \frac{(\cos 10^\circ - \cos 40^\circ)(\cos 50^\circ - \cos 120^\circ)}{(\cos 10^\circ + \cos 40^\circ)(\cos 50^\circ + \cos 120^\circ)} = \frac{\cos 10^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \cos 170^\circ - \cos 120^\circ \cos 10^\circ - \cos 10^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \cos 120^\circ + \cos 170^\circ \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \cos 120^\circ + \cos 170^\circ \cos 10^\circ + \cos 10^\circ \cos 50^\circ}$$

$$\frac{\cos 40^\circ \cos 50^\circ}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} \Rightarrow \text{остаток нуль, т.е.}$$

$$- (\cos 120^\circ \cos 10^\circ + \cos 40^\circ \cos 50^\circ) =$$

$$= + (\cos 170^\circ \cos 10^\circ + \cos 10^\circ \cos 50^\circ)$$

$$\cos 170^\circ \cos 10^\circ + \cos 40^\circ \cos 50^\circ = 0$$

$$\cos 170^\circ + \cos 170^\circ + \cos 90^\circ + \cos 10^\circ = 0$$

$$\cos 170^\circ + \cos 170^\circ + \cos 10^\circ = 0$$

$$2 \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos 120^\circ + \cos 10^\circ = 0$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\cos 10^\circ - \cos 10^\circ = 0$$

$$\frac{\cos 10^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \cos 120^\circ}{\cos 10^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \cos 120^\circ} = 1$$

8

#



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

31944

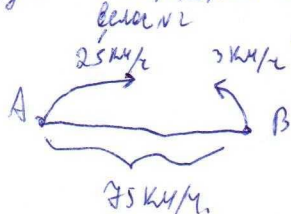
4.)

$$(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = \frac{x}{4}$$

$$0 \leq x \in [-1; 1]$$

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{4(\sqrt{1-x} + 1)} \quad X = 0 \text{ (подборка)}$$

6) будем считать относительно велосипедиста (собака):



$$k \cdot 3t + 25t = 75 \Rightarrow t = \frac{75}{28} \quad \text{собака преодолевает } 15 \cdot \frac{75}{28}$$

$$\text{назад} \quad \frac{75}{28} \cdot 3 = 25 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{75}{9 \cdot 28} = \frac{25}{3 \cdot 28}$$

они встретятся через $t = \frac{75}{25}$

$$\text{опять к } 2: - 25 \cdot \frac{25}{3 \cdot 28} + \frac{75}{28} \cdot 3 = t_2 \cdot 3 + t_2 \cdot 25 \quad \text{собака преодолевает } 15 \cdot \frac{25}{3 \cdot 28}$$

$$\frac{75}{28} + \frac{25}{3 \cdot 28} + \frac{50}{3 \cdot 28} = \frac{75 \cdot 3 \cdot 28 + 25 \cdot 28 + 50}{3 \cdot 28} = \frac{75 \cdot 3 + 25 + 50}{3 \cdot 28} = \frac{9 \cdot 75 + 625}{3 \cdot 28} = 28t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{50}{3 \cdot 28}$$

$$\text{Ответ: } 15 \left(\frac{75}{28} + \frac{25}{3 \cdot 28} + \frac{50}{3 \cdot 28} \right) \quad (4)$$

$$8.) \begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \cos x + \sin x = \sin^2 x + \cos^2 x (=1) \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

$$(1) 1 + \cos y = 0$$

$$(2) \cos y = 1 \Leftrightarrow \cos y = \pm 1 \Rightarrow y = \pi k$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = 2\pi k \\ y = \pi + 2\pi k \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ y = 2\pi k \end{cases}$$

(16)



7.)

$$\sqrt{6x-x^2-5} - \sqrt{7-2x} \geq \sqrt{8x-x^2-12}$$

$$\sqrt{6x-x^2-5} \geq \sqrt{8x-x^2-12} + \sqrt{7-2x}$$

$$\begin{cases} 6x-x^2-5 \geq 6x-x^2-5 + 2\sqrt{8x-x^2-12} \cdot \sqrt{7-2x} \\ 8x-x^2-12 \geq 0 \\ 7-2x \geq 0 \\ 6x-x^2-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{8x-x^2-12} \cdot \sqrt{7-2x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3,5 \\ 8x-x^2-12=0 \end{cases} \\ 8x-x^2-12 \geq 0 \\ x \leq 3,5 \\ 6x-x^2-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$8x-x^2-12 \geq 0 \Leftrightarrow x^2-8x+12 \leq 0$$

$D=$

$$D=64-48=16$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 2; 6 \Rightarrow x \in [2; 6] \Rightarrow x \in [2; 3,5]$$

$$x^2-6x+5 \leq 0$$

$$D=36-20=16$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 1; 5 \Rightarrow x \in [1; 5]$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x=3,5 \\ x=2 \\ x=6 \end{cases} \\ x \in [2; 3,5] \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } x=2, x=3,5$$

12

№9)

пусть $\alpha = x + 2016$

$$\frac{1}{(\alpha-2)(\alpha-1)} + \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha)} + \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} = \frac{1}{999999}$$

$$\frac{\alpha + \alpha - 2}{(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha} + \frac{\alpha + \alpha + 2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} = \frac{1}{999999}$$

$$\frac{2}{(\alpha-2)\alpha} + \frac{2}{\alpha(\alpha+2)} = \frac{1}{999999}$$

$$\frac{2\alpha + 4 + 2\alpha - 4}{\alpha(\alpha^2 - 4)} = \frac{4}{(\alpha^2 - 4)} = \frac{1}{999999}$$

$$4 \cdot 999999 = \alpha^2 - 4$$

$$\alpha^2 = 4000000$$

$$\alpha = \pm 2000$$

$$x + 2016 = \pm 2000$$

$$\begin{cases} x = -4016 \\ x = -16 \end{cases}$$

Ответ: $x = -16$; -4016 (16)