

ШИФР

31968

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.10

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	0	0	8	8	12	12	12	0	0	56	пятьдесят шесть	Кедр

1.
$$A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^2 + (\frac{2}{3})^2} + 4,75 = \frac{\frac{1}{4} + 1}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} + 4,75 =$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{5} + 4,75 = \frac{1}{4} + 4,75 = 5.$$

$B = 0,6 \cdot A = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3.$

Ответ: 3.

4. $\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1$

003: $x^3 - 3x + 1 \geq 0.$

$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 1 = (x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \\ x \geq 1. \end{cases}$$

$x^3 - x^2 - x \geq 0.$

$x(x^2 - x - 1) = 0$

$x = 0$ -
- неверно.

или

$x^2 - x - 1 = 0.$

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 1 \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Проверка:

$$\frac{(1 + \sqrt{5})^3}{8} - 3 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 \geq 0.$$

$$(1 + \sqrt{5})^3 - 12(1 + \sqrt{5}) + 8 \geq 0.$$

$$1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5} - 12 - 12\sqrt{5} + 8 \geq 0.$$

$$12 - 4\sqrt{5} \geq 0.$$

$$12 \geq 4\sqrt{5}$$

$$3 \geq \sqrt{5}$$

$$9 \geq 5 - \text{верно.}$$

Ответ: $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

N5.

$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}.$$

Син Преобразование тригонометрии:

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1 &= (\sin^2 \alpha)^2 + (\cos^2 \alpha)^2 - 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos^2 2\alpha}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\cos 2\alpha}{2} + \\ &+ \frac{\cos^2 2\alpha}{4} - 1 = \frac{2}{4} + \frac{\cos^2 2\alpha}{2} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\cos^2 2\alpha}{2} = \end{aligned}$$

ШИФР 31968

$$-\frac{1}{2} + \frac{\cos^2 2\alpha}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1 + \cos 4\alpha}{4}$$

Преобразуем знаменатели:

$$\begin{aligned} \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1 &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 - 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2}\right)^3 \\ -1 &= \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 2\alpha}{4} - \frac{\cos^3 2\alpha}{8} + \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{2} + \\ &+ 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 2\alpha}{4} + \frac{\cos^3 2\alpha}{8} - 1 = \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{\cos^2 2\alpha}{4} - 1 = \\ &= \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1 + \cos 4\alpha}{8} - 1 = -\frac{3}{4} + \frac{3 + 3\cos 4\alpha}{8} \end{aligned}$$

Подставим преобразование:

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1 + \cos 2\alpha}{4}}{-\frac{3}{4} + \frac{3 + 3\cos 4\alpha}{8}} &= \frac{-4 + 2 + 2\cos 4\alpha}{-6 + 3 + 3\cos 4\alpha} = \frac{2(-2 + 1 + \cos 4\alpha)}{3(-2 + 1 + \cos 4\alpha)} = \\ &= \frac{2}{3} \text{ з.т.г.} \end{aligned}$$

№6.

1) ~~5 км/ч - 3 км/ч~~

5 км/ч - 3 км/ч = 2 км/ч - скорость сближения

2) 10 км : 2 км/ч = 5 ч - понадобилось 2-ому догнать 1-ого.

3) 5 ч · 12 км/ч = 60 км - пролетит деа.

Ответ: 60 км.

N 7.

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - x^2 - 7 \geq 0 \\ 11 - x \geq 0 \\ 9x - x^2 - 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1; 7] \\ x \in (-\infty; +11] \\ x \in [3; 6] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3; 6].$$

1) $8x - x^2 - 7 \geq 0$

$$x^2 - 8x + 7 \leq 0.$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0.$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 7.$$

$$x \in [1; 7]$$

2) $11 - x \geq 0$

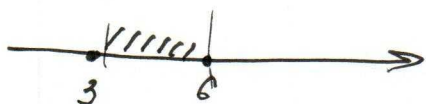
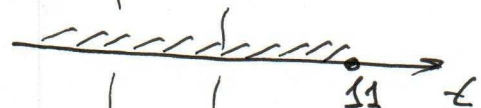
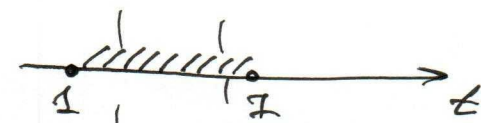
$$x \leq 11$$

3) $9x - x^2 - 18 \geq 0.$

$$x^2 - 9x + 18 \leq 0.$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 6.$$

$$x \in [3; 6]$$



$$\sqrt{8x - x^2 - 7} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18} + \sqrt{11 - x}$$

$$\cancel{8x - x^2 - 7} \geq \cancel{9x - x^2 - 18} + 2\sqrt{(9x - x^2 - 18)(11 - x)} + \cancel{11 - x}$$

$$0 \geq \sqrt{(9x - x^2 - 18)(11 - x)} \Leftrightarrow$$

$$(9x - x^2 - 18)(11 - x) = 0.$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 6$$

$$x_3 = 11 - \text{не принадлежит ОДЗ.}$$

Ответ: 3; 6.

12

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$ 

$$8. \begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} = \sin^2 y \\ \cos^2 x - 2 + \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^2 y \end{cases} +$$

$$\begin{cases} 1 - 4 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 1 \\ \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \end{cases}$$

$$-2 + \cot^2 x + \tan^2 x = 0.$$

Поскольку $\tan^2 x = t$, тогда

$$-2 + \frac{1}{t} + t = 0 \quad / \cdot t \neq 0$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0$$

$$t = 1$$

$$\tan^2 x = 1.$$

$$1) \tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\text{или } \tan x = -1.$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\sin \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sin y$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin y$$

$$y_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos x \neq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



ШИФР

31968

$$1) x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

$$\sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

какие корни
в ответе?

$$2) x = \frac{-\pi}{4} + \pi n.$$

$$\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_3 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$y_4 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

12