

ШИФР 32010

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	2	8	8	12	12	8	16	8	82	восемьдесят два	

N1

$$A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4,75 = \frac{\frac{1}{4} + 1}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} + 4,75 = \frac{\frac{5}{4}}{5} + 4,75 = 0,25 + 4,75 = 5$$

т.е. $A=5$ ✓

Тогда 60% от A равны: $0,6A = 0,6 \cdot 5 = 3$

Ответ: 3. ✓

N2
Пусть Роксфорд добьется $P=x$ млрд. куб.м. газа, то:

«Ковбелл» добьется:

$$\frac{K}{P} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$K = 0,4x$$

«Лукойл» добьется: L (млрд. куб.м.):

$$\frac{L}{P} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

$$L = P \cdot \frac{1}{5} = 0,2x$$

«Газпром нефть» добьется: Γ (млрд. куб.м.):

Тогда имеем уравнение:

$$\frac{\Gamma}{P} = 0,3$$

$$\Gamma = 0,3x$$

$$x = f + 0,3x + 0,4x + 0,2x$$

$$0,1x = f$$

$x = 80$ — добьется Роксфорд

$L = 0,2 \cdot 80 = 16$ — добьется «Лукойл» ✓

$K = 0,4 \cdot 80 = 32$ — добьется «Ковбелл»

$\Gamma = 0,3 \cdot 80 = 24$ — добьется «Газпром нефть»

Ответ: 32; 80; 16; 24 млрд. куб.м. соответственно.

№4. Задача:

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1$$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 \geq 0 \\ x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x^3 - x^2 - x = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \end{array} \right.$$



№4 Дан. урав.

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -7$$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 7$$

$$\begin{cases} x - 7 \geq 0 \\ x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^3 - x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x = 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \checkmark$$

$$\text{т.к. } 0 < 1$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 1$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1, \text{ т.к.}$$

Ответ: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \checkmark \quad (8)$

№5

$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$$

Для доказательства упрощем левую часть дроби и выведем:

$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^6 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^6 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)}{\sin^2 \alpha (\sin^4 \alpha - 1) + \cos^2 \alpha (\cos^4 \alpha - 1)}$$

$$= \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)(\sin^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)(\cos^2 \alpha + 1)} = \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)}{(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + 1) + (\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + 1)}$$

$$= \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)(\sin^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)(\cos^2 \alpha + 1)} = \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{- \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + 1 + \cos^2 \alpha + 1)} = \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{-3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3} \quad (8)$$

Полученное уравнение имеет корни, поэтому левая часть дроби равна правой, значит доказательство верно. Доказательство завершено.



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



№ 7

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18}$$

Найдём область допустимых значений неравенства (ОДЗ):

$$8x - x^2 - 7 \geq 0$$

$$x^2 - 8x + 7 \leq 0$$

$$x = 1; 7$$

$$x \in [1; 7]$$

$$9x - x^2 - 18 \geq 0$$

$$x^2 - 9x + 18 \leq 0$$

$$x = 3; 6$$

$$x \in [3; 6]$$

$$11 - x \geq 0$$

$$x \leq 11$$

$$\begin{cases} x \in [3; 6] \\ x \leq 11 \Leftrightarrow x \in [3; 6] \\ x \in [1; 7] \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } x \in [3; 6].$$

Заметим, что $8x - x^2 - 7 = 9x - x^2 - 18 + (11 - x)$

Обозначим же: $a = 8x - x^2 - 7$

$b = 11 - x$, тогда

$$9x - x^2 - 18 = 8x - x^2 - 7 - (11 - x) = a - b, \text{ т.е.}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq \sqrt{a - b}$$

$$\sqrt{a} \geq \sqrt{b} + \sqrt{a - b} \quad \text{т.к. } \sqrt{a} \geq 0; \sqrt{b} + \sqrt{a - b} \geq 0, \text{ то:}$$

$$a \geq b + a - b + 2\sqrt{b} \cdot \sqrt{a - b}$$

$$2\sqrt{b} \cdot \sqrt{a - b} \leq 0$$

Обратное замечание:

т.к. $\sqrt{b} \geq 0$ $\sqrt{a - b} \leq 0$, то

$$\begin{cases} b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 - x = 0 \\ 9x - x^2 - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

С учётом ОДЗ:

т.к. $x \in [3; 6]$, то $\begin{cases} x = 3 \\ x = 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = 3 \\ x = 6 \end{cases}$$

12

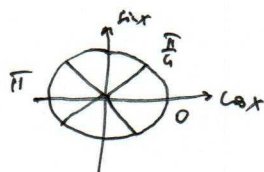
Ответ: $\{3; 6\}$.

$$\begin{aligned}
 & \text{f)} \quad \begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} = \sin y \\ \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} = \sin y \\ \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos y \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 y = \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} \\ \cos^2 y = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \end{cases} \quad \oplus \rightarrow 1 = \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}
 \end{aligned}$$

т.е. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, то

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (1) \\
 & \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (2) \\
 & \begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (3) \\
 & \begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (4)
 \end{aligned}$$



В оба углах систем:

$$\begin{aligned}
 & (1): \quad \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \sin y \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \cos y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$(2): \quad \begin{cases} \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3): \quad \begin{cases} \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4): \quad \begin{cases} \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos y = +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \sin 2x = \pm 1 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m \\ x \neq \pi k \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right); \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right); \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right); \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right), n, k \in \mathbb{Z}$

№9

Таким образом выразим:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k^2-2k+1} + \sqrt[3]{k^2-k} + \sqrt[3]{k^2}} = \frac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{\cancel{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}} (\sqrt[3]{(k-1)^2} + \sqrt[3]{k(k-1)} + \sqrt[3]{k^2})} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{k - (k-1)} = \frac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{1} = \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}$$

по формуле разности кубов

тогда укажем даным образом первые 2 члена суммы:

$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{2} - 1 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \quad \checkmark$$

тогда представим сумму k таких слагаемых:

$$A = \sqrt[3]{2} - 1 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k-2} + \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1} \quad \textcircled{=}$$

заметьте, что слагаемые попарно сокращаются и остается только:

$$\textcircled{=} \sqrt[3]{k} - 1 \quad \checkmark$$

тогда, когда число $A = \sqrt[3]{k} - 1$ должно быть целым, то есть $\sqrt[3]{k} \in \mathbb{R}$ необходимо, чтобы k можно было выразить в виде куба целого, т.е. $\exists a \mid (a \in \mathbb{N}; k = a^3)$.

найдем такое $a \in \mathbb{N}$; где $k = a^3$ $k > 2017$

$$A = 13 - 1 = 12$$

$$\text{Если } a = 12, \text{ то } k = a^3 = 144 \cdot 12 = 1728$$

$$\text{Если } a = 13, \text{ то } k = a^3 = 169 \cdot 13 = 2197$$

$$2197 > 2017 \Rightarrow k_{\min} = 2197$$

Ответ: 2197. $\checkmark$

16



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

32010

№10

$$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a > 0$$

$$4x^2 - 2ax^2 + 13ax - 27x + 33 - 13a > 0$$

$$4x^2 - 27x + 33 > 2ax^2 - 13ax + 13a$$

$$a < \frac{4x^2 - 27x + 33}{2x^2 - 13x + 13} = p(x) \geq 0?$$

Пока пока. $a \in (1; 3)$, то можно x подобрать. $a \in (1; 3)$ раз

$$\frac{4x^2 - 27x + 33}{2x^2 - 13x + 13} \geq 3$$

$$\frac{(4-6)x^2 + (39-27)x + 33-39}{2x^2 - 13x + 13} \geq 0$$

$$\frac{-2x^2 + 12x - 6}{2x^2 - 13x + 13} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{2x^2 - 13x + 13} \leq 0$$

$$D = 9 - 3 = 6$$

$$x = 3 \pm \sqrt{6}$$

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{2x^2 - 13x + 13} \leq 0$$

$$2x^2 - 13x + 13 = 0$$

$$D = 169 - 104 = 65$$

$$x \in [3 - \sqrt{6}, \frac{13 - \sqrt{65}}{4}] \cup [\frac{13 + \sqrt{65}}{4}, 3 + \sqrt{6}]$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{65}}{4}$$

8

$$3 - \sqrt{6} \quad \frac{13 - \sqrt{65}}{4} \quad \frac{13 + \sqrt{65}}{4} \quad 3 + \sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } x \in [3 - \sqrt{6}, \frac{13 - \sqrt{65}}{4}] \cup [\frac{13 + \sqrt{65}}{4}, 3 + \sqrt{6}]$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



№6

Второй углеводород является углеводом с индексом $\nu = 5 - 3 = 2$ т.е.

тоже время между I и II углеводородов $t_6 = \frac{10}{2} = 5$ т.

Т.е. скорость Оке равна $\nu_0 = 12 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то

она умножит $S_0 = \nu_0 \cdot t_6 = 12 \cdot 5 = 60 \text{ км}$.

ответ: 60 км.

№3

$$S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \pi \cdot 258^2$$

Тоже количество деревьев в ряду максимум равно количеству вершин квадратов 12×12 , которые можно разместить в этом ряду, ~~размещая их~~.

$$\text{Т.е. } \nu_0 = \frac{S_{\text{кр}} \cdot 4}{12^2} = \frac{S_{\text{кр}} \cdot 4}{12 \cdot 3} = \frac{S_{\text{кр}}}{36} = \frac{\pi \cdot 258^2}{36} = \pi \cdot \left(\frac{258}{6}\right)^2 = \pi \cdot 43^2$$

$$\begin{array}{r} -258 \\ 24 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 6 \\ 43 \end{array} \times \begin{array}{r} 43 \\ 43 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ 18 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 43 \end{array}$$

одно в каждом ряду у квадратов

Здесь отсутствуют или минимум 2 вершины, т.е.:

$$\nu_{\text{мин}} = \nu_0 - 2\pi \cdot 258$$

$$\pi \cdot 43^2 - 2 \cdot 258\pi < 2018$$

увб. доказано.

②