ГАЗПРОМ **ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

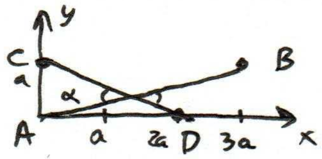
ШИФР 32238

Класс 11 **Вариант** 12 **Дата Олимпиады** 10.02.18

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	4	1	∅	12	12	16	—	∅	53	пятьдесят три	

№3



Пусть сторона квадрата $=a$, тогда введем оси OXY

$C(0,a)$; $A(0;0)$ $\quad \vec{CD}(2a;-a)$

$B(3a,a)$; $D(2a,0)$ $\quad \vec{AB}(3a,a)$

$$\vec{CD}\cdot\vec{AB}=|\vec{AB}|\cdot|\vec{CD}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\vec{CD}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AB}||\vec{CD}|}$$

$$\vec{CD}\cdot\vec{AB}=6a^2+(-a^2)=5a^2 \; ; \; |\vec{AB}|=\sqrt{9a^2+a^2}=\sqrt{10}a$$

$$|\vec{CD}|=\sqrt{4a^2+a^2}=\sqrt{5}a \Rightarrow \cos\alpha=\frac{5a^2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}a^2}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{5}{\sqrt{25\cdot2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}=45^\circ$$

Ответ: 45° V (т.к. мы берем угол $\le 90^\circ$) по определению угла между прямыми.

4

№1

$$B=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot27^{-3}+(0,2)^4\cdot25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}\cdot(2,017)^0\cdot\sqrt{0,36}=\frac{3^{10}\cdot(3^3)^{-3}+5^4\cdot(5^2)^{-2}+64^{\frac{3}{9}}}{2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}}\cdot0,6$$

$$B=\frac{3^{10}\cdot3^{-9}+5^4\cdot5^{-4}+64^{\frac{1}{3}}}{4+2}\cdot0,6=\frac{3+1+4}{6}\cdot\frac{6}{10}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{5}=0,8$$

т.к. $\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\sqrt{2^2-3}=\sqrt{1}=1$; $\quad A\cdot0,1=B \Rightarrow A\frac{1}{10}=B \Rightarrow A=B\cdot10=$
$=0,8\cdot10=8$

Ответ: 8 V 4

№2 Пусть V_1 - объем 1-ого V_2 - объем второго танкера $V_1\ne V_2$

x - производительность 1 насоса $\left[\frac{л}{час}\right]$ $\quad t=\frac{V}{x}$

$$\begin{cases}\frac{V_1}{4x}+\frac{\frac{1}{3}V_2}{4x}=11\\ \frac{V_1}{3x}+\frac{\frac{1}{4}V_2}{x}=18\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}44x=V_1+\frac{1}{3}V_2\\ V_1+\frac{3}{4}V_2=18\cdot3x\end{cases} \qquad T=\frac{V_2}{3x}=?$$

$$V_1=44-\frac{1}{3}V_2 \Rightarrow 44x-\frac{1}{3}V_2+\frac{3}{4}V_2=18\cdot3x=54x$$

$$\Rightarrow \frac{-4V_2+9V_2}{12}=10x \Rightarrow 5V_2=10x\cdot12 \Rightarrow V_2=24x \Rightarrow T=\frac{24x}{3x}=8 \text{ часов}$$

Ответ: 8 часов V 4

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32238

№ 4

$(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)=\frac{1}{4}x \Rightarrow_{\text{т.к.}} a^2-b^2=(a-b)(a+b) \Rightarrow 1+x-1=\frac{1}{4}x$?

$x=\frac{1}{4}x \Rightarrow \boxed{x=0}$ Ответ: $x=0$ → решени? ① другие корни?

№ 5

Независимо от того, как бежала собака, она пробежит S, равное $v_{собаки}\cdot t$, где t - время, через которое велосипедисты встретятся.

Найдем t: $t=\frac{S_0}{v_1+v_2}$, где $S_0=S(A;B)=75$ км

т.к. движение навстречу $\Rightarrow$ скорости складываем

~~$t=\frac{12+13}{75}=\frac{25}{75}=\frac{1}{3}$ часа $\Rightarrow S=15\cdot\frac{1}{3}=5$~~

$t=\frac{S_0}{v_1+v_2}=\frac{75}{12+13}=\frac{75}{25}=3$ часа $\Rightarrow S=v_{собаки}\cdot t=15\cdot 3=45$ км

Ответ: 45 км V 12

№ 8

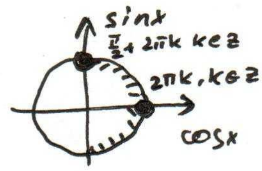
$\begin{cases}\cos x+\cos y=\sin^2 x\\ \sqrt{\sin x-\cos y}=\cos x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos x+\cos y=\sin^2 x\\ \sin x-\cos y=\cos^2 x\\ \cos x\geq 0\end{cases}$)+

$\cos x+\cos y+\sin x-\cos y=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$\Rightarrow \cos x+\sin x=1$; $\sqrt{2}\left(\cos x\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

при условии, что $\cos x\geq 0$

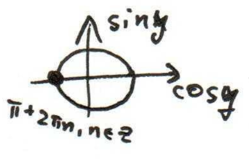
$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{4}+x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ \cos x\geq 0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=2\pi k\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos x\geq 0\end{array}\right.$



$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$ Найдем y:

(1) $\cos(2\pi k)+\cos y=\sin^2(2\pi k)$ $\Rightarrow 1+\cos y=0$

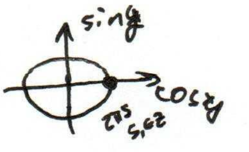
$\cos y=-1 \Rightarrow y=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$



(2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+\cos y=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$

$0+\cos y=1 \Rightarrow \cos y=1$

$\Rightarrow y=2\pi s,\ s\in\mathbb{Z}$



Ответ: $\left[\begin{array}{l} (2\pi k,\ k\in Z;\ y=\pi+2\pi n,\ n\in Z) \\ (\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;\ 2\pi s,\ s\in Z) \end{array}\right.$ V

16

2-ой вар. записи: при $x=2\pi k$ $k\in Z$ $y=\pi+2\pi n$, $n\in Z$
при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$ $y=2\pi s$, $s\in Z$

№7

$\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{7-2x}\geq\sqrt{8x-x^2-12}$

Найдём ОДЗ: $\begin{cases} 6x-x^2-5\geq 0 \\ 7-2x\geq 0 \\ 8x-x^2-12\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-6x+5\leq 0 & (1) \\ x\leq 3{,}5 \\ x^2-8x+12\leq 0 & (2) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x\in[1;5] \\ x\in(-\infty;3{,}5] \\ x\in[2;6] \end{cases}$

(1) $D=36-20=4\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \end{array}\right.\Rightarrow$

(2) $D=64-48=16\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=2 \end{array}\right.\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ОДЗ: $x\in[2;3{,}5]$

$(\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{7-2x})^2\geq 8x-x^2-12$ (возведем выражения в квадрат)

$6x-x^2-5-2\sqrt{(6x-x^2-5)(7-2x)}+7-2x\geq 8x-x^2-12$

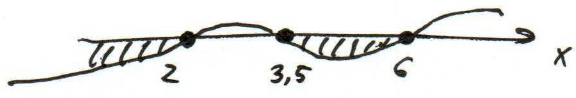
$14-4x\geq 2\sqrt{(6x-x^2-5)(7-2x)}$

$(14-4x)^2\geq 4(6x-x^2-5)(7-2x)$ $|:4$

$49-28x+4x^2\geq 42x-12x^2-7x^2+2x^3-35+10x$

$+2x^3-23x^2+80x-84\leq 0$ Угадаем корень $x=6\Rightarrow$ $(x-6)(2x^2-11x+14)\leq 0$

разложим ур-ие на множители: $2(x-2)(x-6)(x-\frac{7}{2})\leq 0$



без учёта ОДЗ: $x\in(-\infty;2]\cup[3{,}5;6]$

с учётом ОДЗ: $x\in\{2\}\cup\{3{,}5\}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3{,}5 \end{array}\right.$ V

12

№10

$(2a-6)x^2+(32-10a)x-a-8<0$

$D=(32-10a)^2+4(2a-6)(a+8)=4(16-5a)^2+4(2a-6)(a+8)=$

$=4(256-\cancel{4}\cdot 32\cdot 5a+25a^2+2a^2+\cancel{8}16a-6a-48)=$

$\cancel{=4(27a^2-}$

Выразим x от a $\quad a\in(2;4)$

$\Rightarrow$ подставим в ур-ие $x(a)$ значения 2 и 4 и найдем граничные значения x.

? 0

№5

$tg15\cdot tg25\cdot tg35\cdot tg85=1$

$\Rightarrow tg25\cdot tg85=ctg15\cdot ctg35$

$$\frac{tg25+tg85}{ctg25+ctg85}=ctg15\cdot ctg35$$

?

Если доказать это равенство, то исходное верно. 0