



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32278

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	4	8	-	12	-	9	16	-	57	пятьдесят семь семь	

$$1. \begin{cases} 0,1 A = B \Rightarrow A = 10B \\ \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(\frac{2}{64}\right)^{-3}}{(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2} \cdot (2,017)^0 \cdot \sqrt{0,36} = B \quad (2) \end{cases}$$

(2):

$$= \frac{3^{10} \cdot \frac{1}{3^9} + 5^4 \cdot \frac{1}{5^4} + 64^{\frac{1}{3}}}{2+\sqrt{3} + 2\sqrt{4-3} + 2-\sqrt{3}} \cdot 1 \cdot 0,6 =$$

$$= \frac{3 + 1 + 4}{4 + 2} \cdot 0,6 = \frac{8}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{8}{10}$$

$$B = \frac{8}{10}$$

$$A = 10B = 8$$

Ответ: $A = 8$

✓ (4)



ШИФР 32278

2. I. Пусть x ~~не~~ - производительность одного насоса

V_1 - объем первого танкера

V_2 - объем второго танкера $\Rightarrow$ нужно найти $\frac{V_2}{3x} - ?$

II. Зная, что четыре насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и третий второго танкера ~~за 11 часов~~ за 11 часов, а три насоса наполнили первый танкер, затем один из этих трех насосов наполнил четвертый второго танкера, на это заняло для 18 часов, составим систему уравнений и найдем значение $\frac{V_2}{3x}$:

III

$$\begin{cases} \frac{V_1}{4x} + \frac{V_2}{12x} = 11 \\ \frac{V_1}{3x} + \frac{V_2}{4x} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{V_1}{x} + \frac{V_2}{3x} = 44 \quad (1) \\ \frac{V_1}{x} + \frac{3V_2}{4x} = 54 \quad (2) \end{cases}$$

(2) - (1):

$$\frac{3V_2}{4x} - \frac{V_2}{3x} = 10$$

$$\frac{9V_2 - 4V_2}{12x} = 10$$

$$\frac{5V_2}{12x} = 10$$

$$\frac{V_2}{12x} = 2$$

$$\frac{V_2}{3x} = 8 \text{ часов}$$

Ответ: 8

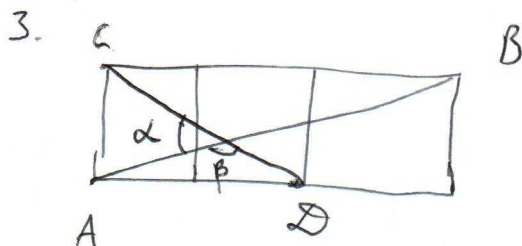
V

4



ШИФР

32278



α - искомый

$$\alpha = 180 - \beta = \angle CDA + \angle BDA$$

Пусть a - сторона квадрата, тогда

$$CD = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$

$$AB = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\cos \angle CDA = \frac{2}{\sqrt{5}} ; \sin \angle CDA = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \angle BDA = \frac{2}{\sqrt{10}} ; \sin \angle BDA = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \alpha = \cos (\angle CDA + \angle BDA) = \cos \angle CDA \cos \angle BDA -$$

$$\sin \angle CDA \sin \angle BDA = \frac{6}{\sqrt{50}} - \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Ответ: 45°

4. $(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = \frac{1}{4}x$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 1]$

$$\frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt{1-x} + 1)}{(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{4}x$$

$$\frac{x(\sqrt{1-x} + 1)}{(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{4}x \Rightarrow x = 0 - \text{корень}$$

$$\frac{(\sqrt{1-x} + 1)}{(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{4}$$

$$(\sqrt{1-x} + 1)(\sqrt{1+x} + 1)$$

$$4\sqrt{1-x} + 4 = \sqrt{1+x} + 1$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



4. (продолжение)

$$3 = \sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x}$$

$$9 = 1+x - 8\sqrt{1-x^2} + 16 - 16x$$

$$8\sqrt{1-x^2} = -15x + 8 \quad (x \leq \frac{8}{15})$$

$$64(1-x^2) = 64 - 240x + 225x^2$$

$$64 - 64x^2 = 64 - 240x + 225x^2$$

$$289x^2 - 240x = 0$$

$$x = 0 - \text{корень}$$

$$x(289x - 240) = 0$$

$$x = \frac{240}{289}$$

$$\frac{240}{289} \sqrt{\frac{8}{15}} \approx 0.30$$

$$\frac{240}{289} \sqrt{\frac{240}{450}}$$

$$\frac{240}{289} > \frac{240}{450} \Rightarrow \frac{240}{289} - \text{нечисл. корень}$$

Ответ: 0 ✓

6. Саданя делит все время, пока велосипедисты не встретятся $\Rightarrow$ нужно найти время, которое проедут велосипедисты до встречи и умножить на скорость саданя:

$$\frac{45}{12+13} = \frac{75}{25} = 3 \text{ ч}$$

Саданя делала от одного велосипедиста к другому 3 часа со скоростью 15 км/ч $\Rightarrow$
Саданя проехала 3 · 15 = 45 км

Ответ: 45 км ✓



ШИФР

32278

$$f. \begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x & (1) \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad \sin x - \cos y = \cos^2 x \quad (0 \leq \cos x \leq 1)$$

(1) + (2)

$$\cos x + \sin x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos x + \sin x = 1 \quad \checkmark$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ с учетом } 0 \leq \cos x \leq 1:$$

$$\frac{\pi}{4} + x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad | \quad ?$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

(1)

$$\cos 2\pi n + \cos y = \sin^2 2\pi n$$

$$1 + \cos y = 0$$

$$\cos y = -1$$

$$y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } (2\pi n; \pi + 2\pi k) \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = ?$$

$$y_2 = ?$$

9

ШИФР

32278

$$9. \quad \frac{1}{(x+2014)(x+2015)} + \frac{1}{(x+2015)(x+2016)} + \frac{1}{(x+2016)(x+2017)} + \frac{1}{(x+2017)(x+2018)} = \frac{1}{999999}$$

Пусть $a = x + 2016$, тогда перепишем выражение с учетом этого

$$\frac{1}{(a-2)(a-1)} + \frac{1}{(a-1)a} + \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} = \frac{1}{999999}$$

Приведем к общему знаменателю.

$$\frac{a(a+1)(a+2) + (a-2)(a+1)(a+2) + (a-1)(a-2)(a+2) + (a-1)(a-2)}{a(a-1)(a-2)(a+1)(a+2)} =$$

$$= \frac{a(a^2+3a+2) + a(a^2-3a+2) + (a^2-4)(a+1) + (a-1)(a^2-4)}{a(a-1)(a-2)(a+1)(a+2)} =$$

$$= \frac{a^3+3a^2+2a+a^3-3a^2+2a+(a^2-4)(a+1)+(a-1)(a^2-4)}{a(a-1)(a-2)(a+1)(a+2)} = \frac{2a^3+4a+2a^3-8a}{a(a-1)(a-2)(a+1)(a+2)} =$$

$$= \frac{4a^3-4a}{a(a-1)(a-2)(a+1)(a+2)} = \frac{4a(a-1)(a+1)}{a(a-1)(a-2)(a+1)(a+2)} =$$

$$\frac{4}{(a-2)(a+2)} = \frac{1}{999999}$$

$$\frac{4}{(a-2)(a+2)} = \frac{1}{(1000000-1)}$$

$$\frac{4}{a^2-4} = \frac{1}{1000000-1} \Rightarrow \frac{4000000-4}{a^2-4} = 1$$

$$\frac{4000000-4-a^2+4}{a^2-4} = 0 \Rightarrow a^2 = 4000000$$

$$a = \pm 2000$$

$$\begin{cases} x+2016 = 2000 \\ x+2016 = -2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -16 \\ x = -4016 \end{cases}$$

Ответ: -16; -4016

✓ (16)