ГАЗПРОМ
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32299

Класс 11 **Вариант** 12 **Дата Олимпиады** 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	4	8	–	12	10	16	–	–	58	пятьдесят восемь	[signature]

№1

$$B=0{,}1A,\quad B=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+(0{,}2)^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{2}}\cdot(2{,}017)^{0}\cdot\sqrt{0{,}36}=0{,}6\cdot\frac{\cancel{3^{10}}^{\,1}\cdot\frac{1}{\cancel{3^{9}}_{1}}+\cancel{5^4}^{\,1}\cdot\frac{1}{\cancel{5^4}}1+(64)^{\frac{1}{3}}}{2+\cancel{\sqrt{3}}+2\sqrt{4-3}+2-\cancel{\sqrt{3}}}=$$

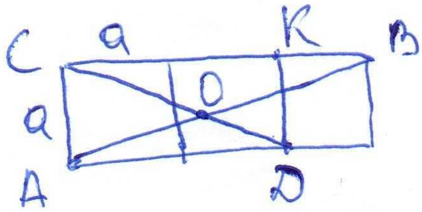
$$=0{,}6\cdot\frac{3+1+\left(4^{3}\right)^{\frac{1}{3}}}{4+2}=0{,}6\cdot\frac{8}{6}=\frac{\cancel{6}^{\,1}\cdot 8}{10\cdot\cancel{6}_{1}}=$$

$=0{,}8$; $A=10B=8$. Ответ: 8. ✓ 4

№3.

$\angle BOD-?$

$\angle BOD<\angle BOC$



Из ΔABC-прямоуг.:

$$\sin\angle CBO=\frac{AC}{AB}=\frac{a}{\sqrt{a^2+9a^2}}=\frac{a}{a\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\Rightarrow\cos\angle CBO=$$

$$=\sqrt{1-\sin^2\angle CBO}\ (\angle CBO\text{-остр.})=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Из $\triangle CKD$ - прямоуг.:

$$\sin\angle BCD = \frac{KD}{CD} = \frac{a}{\sqrt{a^2+4a^2}} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\angle BCD = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\angle BCD \text{ - остр.})$$

$$\angle BOC = 180^\circ - \angle BCD - \angle CBO;$$

$$\sin\angle BOC = \sin(180^\circ - (\angle BCD + \angle CBO)) = \sin(\angle BCD + \angle CBO) =$$

$$= \sin\angle BCD \cdot \cos\angle CBO + \sin\angle CBO \cdot \cos\angle BCD =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\angle BOC = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle BOC = 135^\circ,$$ т.к. он тупой

$$\Rightarrow \angle BOD = 180^\circ - \angle BOC = 45^\circ$$

Ответ: 45°.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32299

Продолжение №3.

Из $\triangle CKD$ - прямоуг.:

$\sin\angle BCD = \frac{KD}{CD} = \frac{a}{\sqrt{a^2+4a^2}} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle BCD = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ($\angle BCD$ - остр.)

$\angle BOC = 180^\circ - \angle BCD - \angle CBO;$

$\sin\angle BOC = \sin(180^\circ - (\angle BCD + \angle CBO)) = \sin(\angle BCD + \angle CBO) =$

$= \sin\angle BCD\cdot\cos\angle CBO + \sin\angle CBO\cdot\cos\angle BCD = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}} +$

$+ \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\cancel{5}\,1}{1\,\cancel{5}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\angle BOC = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BOC = 135^\circ$, т.к. он тупой $\Rightarrow \angle BOD = 180^\circ - \angle BOC =$

$= 45^\circ$

Ответ: 45° v 4

№8.

$$\begin{cases}\cos x + \cos y = \sin^2 x\\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x + \cos y = \sin^2 x & (1)\\ \sin x \geq \cos y\\ \cos x \geq 0\\ \sin x - \cos y = \cos^2 x & (2)\end{cases}$$

(1) и (2): $\cos y = \sin^2 x - \cos x$; $\cos y = \sin x - \cos^2 x$

$\Rightarrow \sin^2 x - \cos x = \sin x - \cos^2 x$

$1 = \sin x + \cos x$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

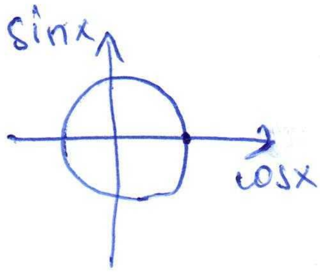
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32299

Продолжение №8.

$\sin x + \cos x = 1$. С помощью триг. окр.



$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \text{– подх.} \\ \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \text{подх.} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pi n \\ x = 2\pi k \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi r \end{cases} \end{array}\right. \quad n, k, l, r \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l \end{array}\right. \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos y = \sin^2 x - \cos x \ (3) \\ \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l \end{array}\right. \quad k, l \in \mathbb{Z} \\ \sin x \geq \cos y \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$$

(3) $\cos y = \sin^2 x - \cos x$

$$\left[\begin{array}{l} \cos y = 0 - 1 = -1 \\ \cos y = 1 - 0 = 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2\pi k \\ \cos y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l \\ \cos y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos y = 1 \end{cases} \text{– подх.} \\ \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos y = 1 \end{cases} \text{– подх} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2\pi k \\ y = \pi + 2\pi g \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l \\ y = 2\pi r \end{cases} \end{array}\right. \quad k, g, l, r \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ При $x = 2\pi k$, $y = \pi + 2\pi g$; при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l$ $y = 2\pi r$; $k, g, l, r \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Ответ: точки: $(2\pi k; \pi + 2\pi g)$; $(\frac{\pi}{2} + 2\pi l; 2\pi r)$, $k, g, l, r \in \mathbb{Z}$

16

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32299

№4.

$$(1+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-1)=\frac{1}{4}x$$

О.Д.З.:

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;1]$$

Пусть $t=\sqrt{1-x}$, $t \geq 0$

$t^2=1-x$

$x=1-t^2$

$$\Rightarrow (1+t)(\sqrt{1+(1-t^2)}-1)=\frac{1}{4}(1-t^2)$$

$$(1+t)(\sqrt{1+(1-t^2)}-1)=\frac{1}{4}(1-t^2)$$

$$(1+t)(4\sqrt{1+(1-t^2)}-4-(1-t))=0$$

$$\left[\begin{array}{l} 1+t=0 \\ 4\sqrt{1+(1-t^2)}=4+1-t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ - пост. ко.} \\ 4\sqrt{1+1-t^2}=5-t \end{array}\right.$$

$$4\sqrt{2-t^2}=5-t$$

$$16(2-t^2)=(5-t)^2$$

$$32-16t^2=25-10t+t^2$$

$$17t^2-10t-7=0$$

$$D=100+7\cdot17\cdot4=100+17\cdot28=100+476=576=24^2$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{10+24}{17\cdot2} \\ t=\frac{10-24}{17\cdot2} \text{ - пост. кор.} \end{array}\right. \Rightarrow t=\frac{34}{34}=1 \Rightarrow \sqrt{1-x}=1$$

$1-x=1$

$\Rightarrow \boxed{x=0}$

$x=0$ - подх. по о.д.з.

Ответ: $\{0\}$.

8

№2

V_1 – объем I

V_2 – объём II, тогда:

x – произв.

$\frac{V_2}{3x}$ – ?

$$\frac{V_1}{4x}+\frac{V_2}{3\cdot 4x}=11$$

$$\frac{V_1}{3x}+\frac{V_2}{4x}=18$$

Пусть $\frac{V_1}{x}=a$ $\frac{V_2}{x}=b$, тогда:

$$\begin{cases}\frac{a}{4}+\frac{b}{12}=11\\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a}{4}+\frac{b}{12}=11\\ \frac{a}{9}+\frac{b}{12}=6\end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{4}-\frac{a}{9}=5$$

$$\frac{9a-4a}{36}=5 \Rightarrow a=36$$

$$\frac{36}{4}+\frac{b}{12}=11$$

$$9+\frac{b}{12}=11 \Rightarrow \frac{b}{12}=2;\ b=24$$

$$\frac{V_2}{x}=24;\ \frac{V_2}{3x}=8.$$

Ответ: 8.

V 4

№6.

V_1 – ск-ть первого = 12км/ч.

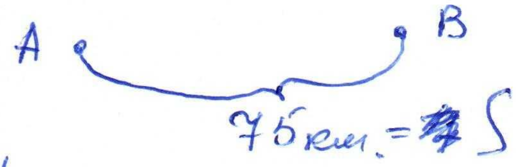
V_2 – ск-ть второго. = 13км/ч.

V_3 – ск-ть собаки = 15 км/ч

t – время встречи.

S_1 – путь первого до встречи.

S_2 – путь второго до встречи.



$S_{собаки}$ – ?

$$S_1 = v_1 \cdot t \ ; \ S_2 = V_2 \cdot t$$

$$S_1 + S_2 = S = 75$$

$$12t + 13t = 75$$

$$t = 3 \text{ часа}$$

За три часа у собаки была скорость $V_3 = 15$ км/ч. $\Rightarrow S_{собаки} = V_3 \cdot t = 3\text{часа} \cdot 15\text{км/ч} =$

$= 45$ км.

Ответ: 45 км. ✓ 12

№7.

$$\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{7-2x}\geq\sqrt{8x-x^2-12}$$

О.Д.З.:

$$\begin{cases}7-2x\geq 0\\6x-x^2-5\geq 0\\8x-x^2-12\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 3{,}5\\(x-5)(x-1)\leq 0\\(x-6)(x-2)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 3{,}5\\x\in[1;5]\\x\in[2;6]\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in[2;3{,}5]$$

$$\begin{cases}\sqrt{6x-x^2-5}\geq\sqrt{7-2x} & (1)\\8x-\cancel{x^2}-12\leq 6x-\cancel{x^2}-5-2\sqrt{(7-2x)(6x-x^2-5)}+(7-2x) & (2)\end{cases}$$

(1) $\sqrt{7-2x}\leq\sqrt{6x-x^2-5}$

$$\begin{cases}6x-x^2-5\geq 0\\7-2x\leq 6x-x^2-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)(x-1)\leq 0\\x^2-8x+12\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[1;5]\\(x-6)(x-2)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$x^2-8x+12=0$

$D=64-48=4^2$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{8+4}{2}=6\\x=\frac{8-4}{2}=2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x\in[2;5]$$

(2) $\cancel{2}\sqrt{(7-2x)(6x-x^2-5)}\leq\cancel{2}(7-2x)$

$$\begin{cases}2(7-2x)\geq 0\\(7-2x)(6x-x^2-5)\geq 0\\(7-2x)(6x-x^2-5-\cancel{2}(7-2x))\leq 0\end{cases}$$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 32299

Продолжение №7.

$$\begin{cases} x\in(-\infty;3{,}5] \\ (2x-7)(x^2-6x+5)\ge 0 \\ (2x-7)(x^2-8x+12)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} x\in(-\infty;3{,}5] \\ -\ \ 1\ \ +\ \ 3{,}5\ \ -\ \ 5\ \ +\ \ x \end{cases}}$$

$x^2-8x+12=0$

$D=64-48=4^2$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{8-4}{2}=2 \\ x=\frac{8+4}{2}=6 \end{array}\right.$

$$\cancel{\begin{cases} x\in(-\infty;3{,}5] \\ x\in[1;3{,}5]\cup[5;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1;3{,}5]}$$

$$\cancel{\begin{cases} x\in[1;3{,}5] \\ x\in[2;5] \end{cases} \Leftrightarrow x\in[2;3{,}5]}$$

$$\begin{cases} x\in[1;3{,}5] \\ -\ \ 2\ \ +\ \ 3{,}5\ \ -\ \ 6\ \ +\ \ x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[1;3{,}5] \\ x\in(-\infty;2]\cup[3{,}5;6] \end{cases}$$

$\Rightarrow x\in[1;2]$

$\Rightarrow$ С учётом О.Д.З.: $x\in\{2\}$.

Ответ: $\{2\}$.

$\{3{,}5\}$

10