



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

32300

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	1	8	8	0	12	12	0	9	58	пятьдесят восемь	Кеш

$$1) A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4,75 =$$

$$= \frac{0,25 + 1}{4 - 5 \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} + 4,75 = \frac{1,25}{\frac{16 - 5 + 9}{4}} + 4,75 = \frac{1,25 \cdot 4}{20} + 4,75$$

$$= 0,25 + 4,75 = 5$$

$$0,6A = 0,6 \cdot 5 = 3$$

Ответ: 3

2) Дано:

$$H - \frac{1}{5}x$$

$$P - \frac{1}{2}x$$

$$L - \frac{1}{10}x$$

$$G - \frac{1}{2}x \cdot 0,3$$

$$\frac{1}{2}x \cdot 0,3 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{10}x = \frac{1}{2}x - 8$$

$$\frac{1,5x + 2x + x - 5x}{10} = -8$$

$$\frac{-0,5x}{10} = -8$$

$$\frac{-x}{20} = -8$$

$$x = 160$$

Ответ: Новатэк - 32 млрд. куб. м.

Роснефть - 80 млрд. куб. м.

Лукойл - 16 млрд. куб. м.

Газпром - 24 млрд. куб. м.

4



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

32300

$$4) \sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1$$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1$$

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^3 - 3x + 1 = (x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1) x^3 - x - x^2 = 0$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Принимаем } x \geq 1 \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$5) \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}$$

Рассмотрим левую часть:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^6 x + \cos^6 x - \sin^2 x - \cos^2 x} &= \frac{\sin^2 x (\sin^2 x - 1) + \cos^2 x (\cos^2 x - 1)}{\sin^2 x (\sin^4 x - 1) + \cos^2 x (\cos^4 x - 1)} = \\ &= \frac{-\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x (\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1) + \cos^2 x (\cos^2 x - 1)(\cos^2 x + 1)} = \frac{-2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + 1)} = \\ &= \frac{-2 \sin^2 x \cos^2 x}{-\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + 1) - \sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x + 1)} = \frac{2}{(\sin^2 x + 1 + \cos^2 x + 1)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

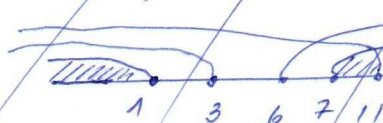
Левая часть равна правой. Тождество доказано.

ч.т.д.

$$7) \sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18}$$

$$\sqrt{(x-1)(x-7)} - \sqrt{11-x} \geq \sqrt{(x-3)(x-6)}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} (x-1)(x-7) \geq 0 \\ 11-x \geq 0 \\ (x-3)(x-6) \geq 0 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty, 1] \cup \{3, 6\} \cup [7, 11]$$

$$\sqrt{(x-1)(x-7)} \geq \sqrt{(x-3)(x-6)} + \sqrt{11-x}$$

$$(x-1)(x-7) \geq (x-3)(x-6) + 2\sqrt{(x-3)(x-6)(11-x)} + 11-x$$

ШИФР

32300

$$\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

12

$$\sin y = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$y = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

какие
пары
обратных?

6) Дано:

$v_1 = 3 \text{ км/ч}$
$v_2 = 5 \text{ км/ч}$
$v_0 = 12 \text{ км/ч}$
$s_1 = 10 \text{ км}$

$x = ?$

$$t = \frac{v_2 - v_1}{s_1} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ ч}$$

$$x = v_0 \cdot t = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ км}$$

Ответ: 2,4 км.

0

10) $(4-2a)x^2 + (13a-22)x + 33-13a > 0, 1 < a < 3$

Найдем крайние значения и области для x :

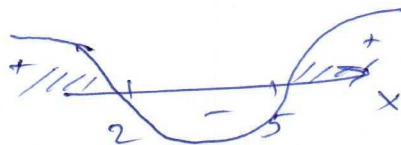
при $a = 1$

$$2x^2 - 14x + 20 > 0$$

$$D = 196 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm 6}{4}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



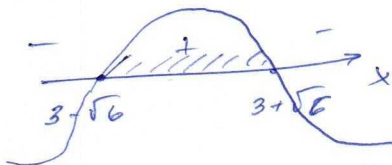
$$x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$$

при $a = 3$

$$-2x^2 + 12x - 6 > 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 144 - 48 = 96$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{-4} = 3 \pm \sqrt{6}$$



Пересечем области:

$$x \in (3-\sqrt{6}; 2) \cup (5; 3+\sqrt{6}) \quad \text{Ответ: } x \in [3-\sqrt{6}; 2] \cup [5; 3+\sqrt{6}]$$

9

$$7) \sqrt{-x^2+9x-7} - \sqrt{11-x} = \sqrt{-x^2+9x-18}$$

$$\sqrt{-x^2+9x-7} = \sqrt{-x^2+9x-18} + \sqrt{11-x}$$

$$\begin{cases} -x^2+9x-7 = -x^2+9x-18 + 2\sqrt{(-x^2+9x-18)(11-x)} + 11-x & (1) \\ -x^2+9x-18 \geq 0 & (2) \\ 11-x \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) 2\sqrt{(-x^2+9x-18)(11-x)} \leq 0 \Leftrightarrow (-x^2+9x-18)/(11-x) = 0$$

$$\begin{cases} x = 11 \\ x = 3 \\ x = 6 \end{cases}$$

12

$$(2) \begin{cases} -x^2+9x-18 \geq 0 \\ 11-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-6)(x-3) \geq 0 \\ x \leq 11 \end{cases} \Rightarrow x \in [3; 6]$$

Ответ: 3; 6

$$8) \begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y & (1) \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y & (2) \end{cases} \text{ ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \neq 0 & x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos x \neq 0 & x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Возведем (1) и (2) в квадрат и сложим

$$\sin^2 x - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 x - 2 + \frac{1}{\cos^2 x} = 4$$

$$\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 4 \Rightarrow \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$(\sin x \cdot \cos x - \frac{1}{2})(\sin x \cdot \cos x + \frac{1}{2}) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} & (3) \\ \sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{2} & (4) \end{cases}$$

$$(3) \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 0) = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(4) \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 0) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Найдем y:

$$\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{1-2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = -\frac{\pi}{4}$$

$$y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$y = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$



ШИФР 32300

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



3) $R = 258 \text{ м}$
 $r = 12 \text{ м}$
 $n = 2018$



$$S = \pi \frac{D^2}{4}, \quad D = 2R = 516$$

$$S' = r^2 = 144 \text{ м}^2$$



$R = 6$
 $R' = 258 + 6$

$$n' = \left[\frac{\pi D^2}{4 \cdot r^2} \right] = \left[\frac{\pi \cdot 516^2}{4 \cdot 12^2} \right] = \left[\frac{\pi \cdot 43^2 \cdot 12^2}{4 \cdot 12^2} \right] =$$

$$= \left[\frac{\pi \cdot 43^2}{4} \right] \approx \left[\frac{3.14}{4} \cdot 1849 \right] < 2018$$

ч. м. г.

9) $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 - 2k + 1} + \sqrt[3]{k^2 - k} + \sqrt[3]{k^2}}$

Разложим:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(k-1)^2} + \sqrt[3]{k(k-1)} + \sqrt[3]{k}} = \frac{\sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k}}{k-1-k} =$$

$$= \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}$$

[Signature]

