

ШИФР 30845

Класс 10 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания СПб ГМТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	10	4	15	5	8	12	5	8	0	8	46,5	сорок шесть с половиной	

Задача 4

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1 \\
 &\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1 \\
 &x^3 - 3x + 1 = (x - 1)^2 \Rightarrow x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \\
 &x^3 - x^2 - x = 0 \\
 &x(x^2 - x - 1) = 0 \\
 &* \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \\
 &\quad \quad \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

$x > 1$
 $x = 0$
 $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$
 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Проверка

$$\begin{aligned}
 1. & x = 0 \\
 & \sqrt{1} = -1 \\
 & x = 0 - \text{не подходит} \\
 2. & x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\
 & \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 \\
 & \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3 \right) + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} - 0,5 \\
 & \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - 3 \right) + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} - 0,5 \\
 & \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \left(\frac{6 + 2\sqrt{5} - 12}{4} \right) + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} - 0,5 \\
 & \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{5})(-3 + \sqrt{5})}{2} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} - 0,5 \\
 & \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5}{2} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} - 0,5 \\
 & \sqrt{\frac{2 - 2\sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} - 0,5 \\
 & \sqrt{1 - \sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} - 0,5 \\
 & \sqrt{-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} - 0,5 \\
 & \text{т.к. } -\sqrt{5} < 0 \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \text{не подходит} \\
 3. & x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\
 & \text{не подходит по ОДЗ} \\
 & x - 1 \geq 0, \text{ т.к. } \sqrt{x^3 - 3x + 1} \geq 0
 \end{aligned}$$

Ответ: $\emptyset$

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$ CH4

ШИФР 30845

Задача ~10

$ax^2 + bx + c > 0$

Рассмотрим коэффициент a

$a = (4-2a)$

1. если $a = 0$

то $a = 2$

$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a > 0$

наклонная прямая $\Rightarrow$ выражение не может быть всегда > 0

2. если $a < 0$ тогда

$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a > 0$ - параболы ветви вниз $\Rightarrow$ выражение не может быть всегда $> 0 \Rightarrow a < 0$ не может быть > 0

3. если $a > 0$ тогда $(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a > 0$ - параболы ветви вверх $\Rightarrow$ выражение будет больше 0 когда $D < 0 \Rightarrow 1 < a < 2$

Рассмотрим все возможные x при $a = 2$ и $a = 1$

При $a = 2$
 $-x + 7 > 0$
 $x < 7$

При $a = 1$

$2x^2 - 14x + 20 > 0$

$x^2 - 7x + 10 > 0$

$(x-5)(x-2) > 0$

$\begin{matrix} + & 0 & - & 0 & + \\ & 2 & & 5 & \end{matrix}$

$-\infty < x < 2 \cup 5 < x < +\infty$

$x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty) + 0$

$\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} ?$

1

уже учтено? $1 \leq a \leq 3$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

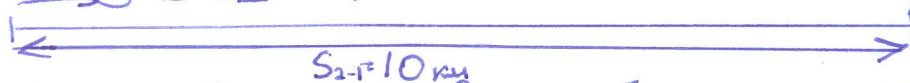


ШИФР 30845

Задача 6.

$$v_2 = 5 \text{ км/ч} \quad v_3 = 12 \text{ км/ч}$$

$$v_1 = 3 \text{ км/ч}$$



Представим, что второй путешественник стоит на месте, тогда скорость первого будет равна скорости сближения.

$$v_1 = |v_2 - v_3| = 5 + 3 = 8 \text{ км/ч}$$

Т.к. скорость второго больше следовательно скорость обгона направлена навстречу второму путешественнику

1. За 1 час оска пролетит 12 км и окажется на середине пути

обратно
путь 1 пройдет 2 км $\Rightarrow S_{2-1} = 8 \text{ км}$

2. За 2 час
путь 1 пройдет еще 2 км $\Rightarrow S_{2-1} = 6 \text{ км}$

оска пролетит 4 км до 2 пути, 6 км до второго и еще 2 км

3. За 3 час
путь 1 пройдет еще 2 км $\Rightarrow S_{2-1} = 4 \text{ км}$

оска пролетит 4+4+4

4. За 4 час
путь 1 пройдет еще 2 км $\Rightarrow S_{2-1} = 2 \text{ км}$

оска пролетит 4+2+2+2+2

4+
n - время в пути путешественников и оски

$$S_{2-1} = 2 \cdot n$$

$$S_{2-1} = 10 - 2 \cdot n$$

$$S_{оски} = 12 \cdot n$$

$$10 = 2 \cdot n$$

$$n = 5$$

$$S_{оски} = 12 \cdot 5 = 60 \text{ км}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 60 \text{ км.}}$$





ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30845

Ответ: ■

Задача 1

$$A = \left(\frac{2-2}{0,5} + 2018 \right)^{-2} + 4,75 = \frac{0,25 \cdot 1}{4 + 1,25 + 2,25} + 4,75$$

$$= \frac{0,25}{7,5} + 4,75 = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 15} + \frac{58}{2} = \frac{1}{30} + \frac{58}{2}$$

$$B = 0,6 A, \text{ т.е. } 60\% \text{ от } A$$

$$B = 0,6 \cdot \left(\frac{1}{30} + \frac{58}{2} \right) = \frac{6 \cdot 1}{10 \cdot 30} + \frac{6 \cdot 58}{10 \cdot 2} = \frac{1}{50} + \frac{3 \cdot 58}{10} = 17,4 + 0,02 = 17,42$$

Ответ: 17,42

Задача 2

$$\text{Роснефть} = \frac{1}{2} x = \frac{5}{10} x \text{ млрд м}^3$$

$$\text{Новатек} = \frac{1}{5} x = \frac{2}{10} x \text{ млрд м}^3$$

$$\text{Лукойл} = \frac{1}{10} x \text{ млрд м}^3$$

$$\text{Газпром} = 30\% \text{ от } \frac{5}{10} x = 0,3 \cdot \frac{5}{10} = \frac{15}{100} x$$

$$\frac{5}{10} x - \left(\frac{2}{10} x + \frac{1}{10} x + \frac{15}{100} x \right) = 8$$

$$\frac{50}{100} x - \left(\frac{20}{100} x + \frac{10}{100} x + \frac{15}{100} x \right) = 8$$

$$\frac{50}{100} x - \frac{45}{100} x = 8$$

$$\frac{5}{100} x = 8$$

$$x = 8 \cdot \frac{100}{5}$$

$$x = \frac{800}{5}$$

$$x = 160 \text{ млрд м}^3$$

$$\text{Роснефть} = \frac{1}{2} \cdot x = \frac{160}{2} = 80 \text{ млрд м}^3$$

$$\text{Новатек} = \frac{2}{10} \cdot x = \frac{160 \cdot 2}{10} = 32 \text{ млрд м}^3$$

$$\text{Лукойл} = \frac{1}{10} \cdot x = \frac{160}{10} = 16 \text{ млрд м}^3$$

$$\text{Газпром} = \frac{3}{10} \cdot \text{Роснефть} = \frac{3 \cdot 80}{10} = 24 \text{ млрд м}^3$$

Ответ: 80 млрд м³; 32 млрд м³; 16 млрд м³; 24 млрд м³



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30845

Задача 8.

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} = \sin y \\ \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-\cos^2 x}{\sin x} = \sin y \\ \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = -\sin x \sin y \\ \frac{-\sin x \sin y - 1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sin x \sin y - 1 = \cos x \cos y \\ \cos^2 x = -\sin x \sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 1 \\ \cos^2 x = -\sin x \sin y \end{cases}$$

Основное тригонометрическое
св-во
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Задача 5

$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$$

Пусть $\sin^2 \alpha = x$
 $\cos^2 \alpha = y$

По основному тригонометрическому св-ву
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$$

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^3 + y^3 - 1} = \frac{2}{3}$$

$$3(x^2 + y^2 - 1) = 2(x^3 + y^3 - 1)$$

$$3x^2 + 3y^2 - 3 = 2x^3 + 2y^3 - 2$$

$$3x^2 - 2x^3 - 1 = 2y^3 - 3y^2$$

$$x^2(3 - 2x) - 1 = 2y^2(y - 3)$$

$$(1 - y)^2(3 - 2(1 - y)) = 2y^2(2y - 3) + 1$$

$$(1 - 2y + y^2)(1 + 2y) = 2y^2(2y - 3) + 1$$

$$1 + 2y - 2y - 4y^2 + y^2 + 2y^3 = 2y^3 - 3y^2 + 1$$



Ответ:



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 30845

Задача 7

$$\sqrt{8x-x^2-7} - \sqrt{11-x} \geq \sqrt{9x-x^2-18}$$

$$\text{ОДЗ} \begin{cases} 8x-x^2-7 \geq 0 \\ 11-x \geq 0 \\ 9x-x^2-18 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-8x+7 \leq 0 \\ x \leq 11 \\ x^2-9x+18 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 7 \\ x \leq 11 \\ 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$3 \leq x \leq 6$$

$$\begin{aligned} x^2-8x+7 &\leq 0 \\ (x-7)(x-1) &\leq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x^2-9x+18 &\leq 0 \\ (x-3)(x-6) &\leq 0 \end{aligned}$$



$$\sqrt{8x-x^2-7} - \sqrt{11-x} \geq \sqrt{9x-x^2-18}$$

$$8x-x^2-7 - 2\sqrt{8x-x^2-7}\sqrt{11-x} \geq 9x-x^2-18$$

$$(-x+11) \geq (2\sqrt{8x-x^2-7}\sqrt{11-x})$$

$$(-x+11)^2 \geq 4(8x-x^2-7)(11-x) \quad | (-x+11) \neq 0$$

$$x \neq 11, \text{ не удовлетв. ОДЗ.}$$

$$-x+11 \geq 4(8x-x^2-7)$$

$$-x+11 \geq 32x-4x^2-28$$

$$4x^2-33x+39 \geq 0$$

$$D = 33^2 - 39 \cdot 16 = 3(11^2 - 13 \cdot 16) = 3(121 - 208) < 0 \Rightarrow 4x^2 - 33x - 28 \geq 0$$

$$3 \leq x \leq 6$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 13 \\ \hline 48 \\ + 160 \\ \hline 208 \end{array}$$



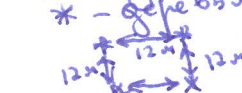
Ответ: $x \in [3; 6]$

Задача 3

Пусть n — это кол-во деревьев в роше. При наименьшем расстоянии между деревьями кол-во деревьев будет максимум. $\Rightarrow R = 12$ м. Самое оптимальное расположение деревьев.

квадрат.

* — деревья



Пусть $\pi = 3$

$$\Rightarrow S_{\text{д. мин. деревьев}} = 3 \cdot 12 \cdot 258$$

$$S_{\text{круга}} = \pi r^2 = 3 \cdot 12^2 = 432$$

Т.к. $S_{\text{квадрата}} > S_{\text{круга}}$

$$= S_{\text{кр}}$$

$$3 \cdot 258^2 = 12(\sqrt{n}-1) \cdot 2 \cdot 12$$

$$3 \cdot 43^2 = 8(\sqrt{n}-1)$$

$$3 \cdot 1419 = 8(\sqrt{n}-1)$$

$$4257 = 8(\sqrt{n}-1)$$

$$= 12(\sqrt{n}-1) \cdot 2 \cdot 12 \text{ (выведено экспериментально)}$$

меньше $S_{\text{круга}}$ мы проверим на $S_{\text{кр}} =$



$$(ab)c = a(bc)$$

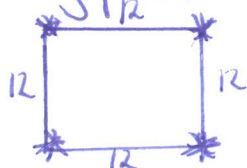
$$E = mc^2$$



ШИФР 30845

Задача 3.

Пусть n - это кол-во деревьев в роше. При наименьшем расстоянии между деревьями кол-во деревьев будет максимальным. Примем $r = 12$ м. Самое оптимальное расположение деревьев квадрат со стороной r

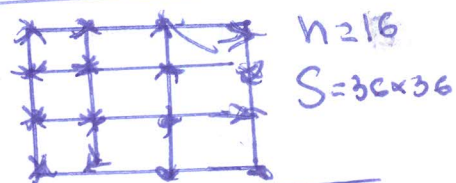
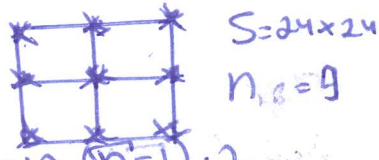


Т.к. мозаика круга меньше описанного вокруг него квадрата, то докажем это для описанного квадрата. Т.к. если будет диаметр для большего мозаики, то и для меньшего вернётся. Т.к. квадрат описанный по его стороне будет равен d круга

$$d_{кр} = 2r = 2 \cdot 12 = 24$$

$$\text{Кол-во квадратов } 12 \times 12 \text{ в квадрате } 516 \times 516 = \frac{516}{12} = 43$$

Примечание:



$$\text{Следовательно } S = 12 \times 12 \cdot (n-1) \cdot 2$$

$$S_{кв} = 12 \times 12 \cdot 43 \Rightarrow 43 = (\sqrt{n}-1) \cdot 2$$

$$\begin{aligned} 44 &= (\sqrt{n}-1) \cdot 2 \\ 22 &= \sqrt{n}-1 \\ \sqrt{n} &= 23 \\ n &= 23^2 \\ n &= 529 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$516 \cdot 516 = 12 \cdot 12 \cdot n$$

$$n = 43^2$$

$$\text{Т.к. } 529 < 2018$$

$$n < 2018 \quad (\text{даже в кв. больше } S \text{ круга})$$

Ответ: ■