ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26408

Класс 9 Вариант 1-1 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	5	5	5 10	5 10	5 15	5 15	50 50	сто пятьдесят	Бегу Бегу

№1 $\frac{5\frac{1}{5}-4,1}{3\frac{2}{3}} = \frac{\frac{52}{10}-\frac{41}{10}}{\frac{11}{3}} = \frac{\frac{11}{10}}{\frac{11}{3}} = \frac{3}{10} = 0,3$

+

Ответ: 0,3.

№2 Пусть первая бригада изготовила x станков, тогда, так как вторая, по условию, изготовила на 15% меньше чем первая, она изготовила $0,85x$ станков; третья, по условию, изготовила на 20% больше чем первая, значит, $1,2x$ станков. Так как в сумме бригады изготовили 366 станков, имеем уравнение

$x + 0,85x + 1,2x = 366$

$3,05x = 366$

$3\frac{1}{20}x = 366$

$61x = 366 \cdot 20$

$x = 120$

+

Ответ: первая бригада изготовила 120 станков.

№4 $\sqrt{5-3x} > 1$, т.к. обе части неотрицательны это неравенство (возведение в квадрат) равносильно $5-3x > 1 \mid -1+3x$

$4 > 3x \mid :3$

$1\frac{1}{3} > x$

Т.е. $x < 1\frac{1}{3}$, значит, наибольшее целое решение данного нера-

623?

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26408

№5. $\frac{13-x}{6-2x} > 4 \quad | -4$

$\frac{13-x}{6-2x} - 4 > 0$

$\frac{13-x}{6-2x} - \frac{4(6-2x)}{6-2x} > 0$

$\frac{13-x-24+8x}{6-2x} > 0$

$\frac{7x-11}{6-2x} > 0$, чтобы дробь была положительной необходимо и достаточно, чтобы числитель и знаменатель были одного знака. То есть

1) $\begin{cases} 7x-11>0 \\ 6-2x>0 \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} 7x-11<0 \\ 6-2x<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 1\frac{4}{7} \\ 3 > x \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1\frac{4}{7} \\ 3 < x \end{cases}$

Нет решений, т.к. $3 > 1\frac{4}{7}$.

$3 > x > 1\frac{4}{7}$

Целые решения данного нер-ва $x=2$

Ответ: сумма всех целых решений неравенства 2.

№6.



Дано: ABCDEF - правильный, $AC = 2\sqrt{3}$

Найти: P_{ABCDEF}

Решение: заметим, что по определению в правильном 6-угольнике все стороны и все углы равны, так как сумма углов в 6-угольнике $180° \cdot (6-2) = 720°$, то каждый угол равен $\frac{720°}{6} = 120°$, т.е. $\angle ABC = 120°$, причем, т.к. $AB = BC$, то $\angle BCA = \angle BAC = \frac{180° - \angle ABC}{2} = 30°$, т.к. треугольник ABC - равнобедренный. Проведем BH - высоту в $\triangle ABC$, причем, т.к. он равнобедренный BH - высота, медиана и значит $HC = AH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$. В $\triangle BHC$ ~~sin∠B~~ $\cos\angle BCH = \frac{\sqrt{3}}{BC}$, тогда $BC = 2$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26408

№6 Продолжение

значит, $P_{ABCDEF} = 6 \cdot BC = 12$ (т.к. ABCDEF - правильный, все стороны равны). заметим, что AC - наименьшая диагональ, т.е. $\angle ACD = 120° - 30° = 90°$, т.е. в $\triangle ACD$ AD - гипотенуза, т.е. больше катета AC ($AC = BD = CE = EA = BF = FD$ и $AD = BE = FC$, т.к. 6-угольник правильный) +

Ответ: $P_{ABCDEF} = 12$.

№7 $\sqrt{-x^2+2x+35} = -x-5$

так как квадратный корень неотрицателен, то $-x-5 \geq 0$.

возведем обе части уравнения в квадрат

$-x^2+2x+35 = x^2+10x+25$

Составим систему.

$$\begin{cases} -x^2+2x+35 = x^2+10x+25 \\ -x-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 \geq x \\ 2x^2+8x-10=0 \end{cases} \quad 2x^2+8x-10=0$$

$$\begin{cases} -5 \geq x \\ (x-1)(x+5)=0 \end{cases}$$

$x=1$ или $x=-5$

неверно, $-5 \geq -5$ - верно.

т.к. $-5 \geq x$

Ответ: $x=-5$ +

№8 $n^2-287n+7252<0$

$7252 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 259 = 28 \cdot 259$, тогда по теореме обратной т. Виета 28 и 259 - корни уравнения $n^2-287n+7252=0$, т.к. $28 \cdot 259 = 7252$ и $(n-28)(n-259) < 0$, значит, n удовлет-

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26408

№8 продолжение

(При $n<28$ оба множителя отриц., т.е. произведение полож., при $n>259$ оба множ. полож., т.е. произв. полож., при $259>n>28$ $(n-28)>0$, а $(n-259)<0$, т.е. произвед. отриц.), тогда целые числа, делящиеся на 7 в промежутке от 28 до 259 не включ., имеют вид $7\cdot k$, где $k>4$ и $37>k$. (т.к. $28=4\cdot 7$, $259=37\cdot 7$), тогда их сумма равна

$7\cdot(5+6+7+\ldots+35+36) = 7\cdot\left(\frac{36\cdot 37}{2}-1-2-3-4\right) =$ (сумма чисел от 1 до 36 равна $\frac{36\cdot 37}{2}$)

$= 7\cdot(18\cdot 37-10) = 7\cdot 656 = 4592$

$\times\begin{array}{r}37\\18\\\hline 296\\37\\\hline 666\end{array}$ $\times\begin{array}{r}656\\7\\\hline 4592\end{array}$

Ответ: сумма всех целых чисел, делящихся на 7 и удовлетв. нер-ву $n^2-287n+7252<0$ 4592. +

№3 $\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}} = \dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}-\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{y\sqrt[4]{y}-y\sqrt[4]{x}+x\sqrt[4]{y}-x\sqrt[4]{x}} =$

$= \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)-(\sqrt{x}-\sqrt{y})\sqrt{xy}}{(x+y)(\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x})} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)}{(x+y)(\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x})} = -\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})} =$

$= -(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}) = -(0{,}1+3) = -3{,}1 = -3\frac{1}{10}$ при $x=81$, $y=10^{-4}$ +

$\sqrt{x}-\sqrt{y} = (\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})$

$\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3} = (\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)$

$(a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ по формулам сокращенного умножения

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26408

№10 Посчитаем сумму цифр всех целых чисел от 1 до 999, для этого посмотрим сколько раз каждая цифра кроме нуля (на 0 можно не обращать внимания, т.к. он в сумму ничего не даёт) будет встречаться в наших числах, чтобы это сделать посчитаем сколько раз цифра стоит на последнем месте, предпоследнем и первом (если число не трехзначное припишем одну или два нуля в начало, дополнив до трех знаков каждое число; $\overline{abc}$ c - посл. цифра, b - предпоследняя, a - первая), тогда чисел, у которых последняя цифра данного k - 100, т.к. наши числа это $\overline{a\,b\,k}$, причем $0 \le a \le 9$ и $0 \le b \le 9$, т.е. 10·10 вариантов, аналогично, если k стоит на предпоследнем месте, таких чисел будет $\overline{a\,k\,c}$ 10·10, т.к. $0 \le a \le 9$ и $0 \le c \le 9$, и чисел, у которых k - первая цифра 100, т.к. $0 \le b \le 9$ и $0 \le c \le 9$, таким образом цифра k встречается среди наших чисел 300 раз, тогда сумма цифр всех целых чисел от 1 до 999 кроме 0 (ее в начале решили), тогда это все цифры

$$\sum_{k=1}^{9} 300 \cdot k = 300(1+2+3+\ldots+9) = 45 \cdot 300 = 13500,$$ тогда

сумма цифр целых чисел от 1 до 1000 13500+1, т.к. у числа 1000 сумма цифр - 1

+

Ответ: 13501.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26408

№9 Пусть в первый день Миша съел x конфет, тогда Настя съела $2x$ конфет, а Гриша $3x$, так как по условию они съели в 2 и 3 раза соответственно больше.

Пусть во второй день Настя и Миша съели по y конфет, тогда Гриша съел $2y$ конфет, т.к. по условию Настя и Миша съели конфет в 2 раза меньше, чем Гриша. В результате у Насти осталось 8 конфет, по условию, значит, изначально было $2x+y+8$ конфет, причем изначально конфет у детей было поровну, значит, у Миши осталось $2x+y+8-x-y = x+8$ конфет, а у Гриши $2x+y+8-3x-2y = 8-x-y$ конфет, причем конфет у Миши осталось в 5 раз больше, чем у Гриши, значит,

$$x+8 = 5(8-x-y)$$

$$6x+5y = 32$$

$5(x+y)+x = 32$, заметим, что x и y - целые, значит, можно рассмотреть 3 случая

1) $x+y=6$, $x=2$, $y=4$

2) $x+y<6$, тогда $5(x+y)\leq 25$, тогда $x \geqslant 7$, т.к. $5(x+y)+x = 32$, но $x+y<6$ - противоречие

3) $x+y>6$, тогда $5(x+y) \geqslant 35$, т.к. x - неотрицательное

$5(x+y)+x > 32$, т.к. x - неотрицательное

Итак, в первый день Миша съел 2 конфеты, т.е. Настя съела 4, а во второй Настя съела 2 конфеты, т.е. Настя осталось 8 конфет, значит, всего было 16 конфет (было у каждого по 16 конфет, Миша съел 2 в первый и y во второй день, Настя по 4 в оба дня, Гриша 6 в первый день и 8 во второй, все условия выполняются)

Ответ: конфет в подарке, который получил каждый из ребят, было 16 (в трех подарках в сумме 48).

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26408

№9 Заметим, что если Настя с Мишей в сумме съели в 2 раза меньше конфет чем Гриша во второй день в сумме x, то Гриша съел 2x, т.е. во второй день все трое съели 3x конфет. Пусть в первый день Миша съел y конфет, тогда Настя 2y, а Гриша 3y, т.е. в сумме они съели 6y конфет в первый день, заметим, что 3 : 3 и 6 : 3, значит, в сумме за эта дни дети съели кол-во конфет кратное 3, причем так как их трое и у каждого изначально не обяз поровну, то их в сумме это кратно 3, тогда осталось тоже кратно 3 число конфет, но если у Миши 5t, а у Гриши 6t+8, то у кого-то 6t+8 : 3 - противоречие, значит, невозможно, то есть Настя с Мишей в сумме не могли съесть четное число конфет, что во второй день (другое пояснение условия) число конфет меньше чем у Гриши ровно в 2 раза.