ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26978

Класс 9 Вариант 1-2 Дата Олимпиады 10.02

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	5	5	5 10	5 10	5 15	5 15	50 50 } 100	пятьдесят пятьдесят	[illegible] [illegible]

№1

$1\frac{3}{6}=1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$$4\cdot\frac{3\frac{2}{3}-2\frac{1}{6}}{1.5}=4\cdot\frac{\left(3\frac{4}{6}-2\frac{1}{6}\right)\cdot 2}{3}=4\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 2}{3}=4.$$

Ответ: 4 +

№2

Пусть путь от A до B – S км. А скорость автомобиля – x км/ч. Тогда, т.к. автомобиль проезжает расстояние от A до B за 2,5 часа, то (1) $2,5\cdot x = S$. Если автомобиль увеличивает скорость на 20 км/ч, то за 2 часа он проедет на 15 км больше, чем от A до B, значит, $(x+20)\cdot 2 = S+15$. Запишем систему:

$$\begin{cases} 2,5x = S \quad (1) \\ (x+20)\cdot 2 = S+15 \quad (2) \end{cases}$$

(2) – (1)

$40-0,5x=15$

$25=0,5x$

$x=50$ км/ч +

Тогда, расстояние от A до B равно: $50\cdot 2,5=125$ км

Ответ: расстояние от A до B равно 125 км

№4

$\sqrt{2x-3}<3$. Т.к. $2x-3$ стоит под корнем, то $2x-3\geq 0$, откуда $x\geq 1,5$.

Возведем в квадрат оба этих положительных числа, при $x\geq 1.5$:

$2x-3<9 \;|+3$

$2x<12 \;|:2$

$x<6$

Итак, $1,5\leq x<6$. Тогда, минимальным целым решением будет число 2. +

№3

Заметим, что в выражении присутствует число $\sqrt{n}$, откуда $n\geq 0$. И присутствует число $\sqrt{mn}$, т.к. $n\geq 0$, то и $m\geq 0$. Итак, сделаем замену. Пусть $\sqrt[4]{m}=a$, $\sqrt[4]{n}=b$. Тогда, $\sqrt{m}=a^2$; $\sqrt{n}=b^2$ и $m=a^4$, $n=b^4$, тогда $\sqrt{mn}=a^2b^2$, а $\sqrt[4]{mn}=ab$. Тогда имеем выражение:

$$\left(\left(a^2b^2-\frac{a^4b^4}{a^4+a^2b^2}\right):\frac{ab-b^2}{a^4-b^4}-a^4b^2\right)^2:\sqrt[3]{mn\sqrt{mn}}=$$

$$=\left(\left(a^2b^2-\frac{a^2b^4}{a^2+b^2}\right)\cdot\frac{a^4-b^4}{ab-b^2}-a^4b^2\right)^2:\sqrt[3]{\sqrt{m^3n^3}}=$$

$$=\left(\left(\frac{a^4b^2+a^2b^4-a^2b^4}{a^2+b^2}\right)\cdot\frac{a^4-b^4}{b(a-b)}-a^4b^2\right)^2:\sqrt{mn}=$$

$$=\left(\frac{a^4b+a^2b^3-a^2b^3}{a^2+b^2}\cdot\frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{a-b}-a^4b^2\right)^2:a^2b^2=$$

$$=\left(a^4b\cdot(a+b)-a^4b^2\right)^2:a^2b^2=\left(a^5b+a^4b^2-a^4b^2\right)^2:a^2b^2=$$

$$=a^{10}b^2:a^2b^2=a^8=m^2.$$ Т.к. $m=3$, то значение выражения равно 9.

Ответ: значение выражения при $m=3$ равно 9.

+

№5

$$\frac{4-x}{4x+5}\leq -2 \quad |+2$$

$$\frac{4-x+8x+10}{4x+5}\leq 0$$

$$\frac{7x+14}{4x+5}\leq 0 \quad |:7>0$$

$$\frac{x+2}{4x+5}\leq 0$$

Рассмотрим три числовых промежутка: $\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$; $\left[-2;-\frac{5}{4}\right]$; $(-\infty;-2)$. Если $x\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$, то $x+2>0$ и $4x+5>0$, откуда $\frac{x+2}{4x+5}>0$. Если $x\in(-\infty;-2)$, то $x+2<0$ и $4x+5<0$, откуда $\frac{x+2}{4x+5}>0$. Если $x\in\left[-2;-\frac{5}{4}\right]$. То при случае $x=-2$ выражение равно 0, а при $x=-\frac{5}{4}$ не имеет смысла, т.к. на 0 делить нельзя. Если ... откуда $\frac{x+2}{...}<0$

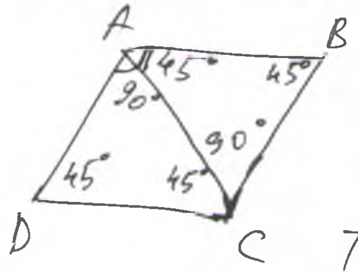
+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26978

№6 Дано: $\angle DAC = 90^\circ$; $\angle CAB = 45^\circ$; $AC = 5$



Т.к. $ABCD$ – параллелограмм, то $AB \parallel DC$, откуда $\angle BAC = \angle ACD = 45^\circ$. Тогда, в $\triangle ADC$ $\angle ADC = 180^\circ - \angle DAC - \angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

Тогда, т.к. $\angle ADC = \angle ABC$, то $\angle ABC = 45^\circ$ и в $\triangle ABC$ $\angle ACB = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$.

Итак, т.к. $DA \perp AC$, и $AC \perp BC$, то $S_{\triangle DAC} = \frac{DA \cdot AC}{2}$ и $S_{\triangle ACB} = \frac{BC \cdot AC}{2}$. Заметим, что в $\triangle ADC$ и $\triangle ACB$, $\angle ADC = \angle ACD = 45^\circ$ и $\angle CAB = \angle CBA = 45^\circ$, откуда $DA = AC = BC$. Итак,

$S_{ABCD} = S_{\triangle DAC} + S_{\triangle ABC} = \frac{DA \cdot AC}{2} + \frac{BC \cdot AC}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} + \frac{5 \cdot 5}{2} = 25$

Ответ: $S_{ABCD} = 25$.

+

№7

$\sqrt{-x^2 - x + 12} = 3x - 9$.

Т.к. $\sqrt{-x^2-x+12}$ – неотрицательное число по определению корня квадратного числа, то $3x - 9 = \sqrt{-x^2-x+12} \geq 0$, то Итак:

$3x - 9 \geq 0$, откуда $3x \geq 9$ и $x \geq 3$.

$\sqrt{-x^2-x+12} = 3x - 9 \iff \sqrt{(x-3)(-x-4)} = 3x - 9$. Т.к. $x \geq 3$, то разберем 2 случая 1) $x > 3$. Тогда, подкоренное выражение должно быть больше 0, т.е. $(x-3)(-x-4) \geq 0$. т.к. $(x-3) > 0$ в нашем случае, то $-x - 4 > 0$, откуда $-4 > x$

Но $x > 3$. Значит, при $x > 3$ решений нет. Проверим $x = 3$.

$\sqrt{-9-3+12} = 3 \cdot 3 - 9 \iff 0 = 0$. Значит, $x = 3$ – корень. Итак, мы показали, что $x \geq 3$ и разобрали два случая: в 1) случае у нас получилось, что при $x > 3$ не существует корней и при $x = 3$ мы получили, что это и есть решение

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(a b) c = a (b c)$ $E = mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26978

№8

$n^2 - 188n + 2752 < 0$. Решим сначала данное неравенство.

$(n-172)(n-16) < 0$ (то же самое, что и $n^2 - 188n + 2752 < 0$)

Тогда, при $n \geq 172$ $n - 172 \geq 0$ и $n - 16 > 0$, откуда, ~~выражение~~ $n^2 - 188n + 2752 = (n-172)(n-16) \geq 0$, т.е. $n \geq 172$ не удовлетворяет неравенству. При $n \leq 16$: $n - 172 \leq 0$ и $n - 16 \leq 0$, откуда $(n-172)(n-16) \geq 0$. Т.е. при $n \leq 16$ выражение $n^2 - 188n + 2752 = (n-172)(n-16) \geq 0$, т.е. $n \leq 16$ не удовлетворяет неравенству. Заметим, что промежуток $n \in (16; 172)$ удовлетворяет, т.к. $n^2 - 188n + 2752 = (n-172)(n-16)$, где $n - 16 > 0$, т.к. $n \in (16; 172)$, а $n - 172 < 0$, т.к. $n \in (16; 172)$. Т.е. $n^2 - 188n + 2752 = (n-172)(n-16)$. Откуда $(n-172)(n-16) < 0$, т.к. одно слагаемое больше 0, а другое - меньше. Итак, неравенству $n^2 - 188n + 2752 < 0$ удовлетворяют числа в промежутке $(16; 172)$. Найдем среди них числа целые и кратные 4. Это: 20, 24, 28, ... 168. Найдем их сумму: $20 + 24 + 28 + \ldots + 168 =$

$= 4 \cdot (5 + 6 + 7 + \ldots + 42) = 4 \cdot \left(\frac{42 \cdot 43}{2} - 10\right) = 4 \cdot (21 \cdot 43 - 10) = 4 \cdot (903 - 10) =$

$= 4 \cdot 893 = 3572$.

Ответ: сумма таких чисел - 3572

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26978

№9

Пусть в задании у мальчиков было a задач, а у Ани тогда, по условию, будет $a+5$ задач. Пусть в первый день Аня решила x задач, тогда Боря решил столько же (из условия), т.е. тоже x задач. А Витя решил в 2 раза больше, т.е. решил $2x$ задач. Пусть во 2 день Боря решил y задач, тогда Витя решил тоже y задач. Тогда, т.к. Аня решила в 3 раза больше Бори, то она решила $3y$ задач. Итак, нарисуем табличку:

	Аня	Боря	Витя
1 день	x	x	$2x$
2 день	$3y$	y	y
осталось	1	$2y-4$	$-x+2y-4$
сумма по 3 строкам ~~дня~~	$a+5$	a	a

Тогда, Ане осталось решить ровно 1 задачу, откуда $x+3y+1=a+5$, т.е. $x+3y-4=a$.

Тогда Боря решил $x+y$ задач, а надо ему решить $a=x+3y-4$ задач. Откуда ему осталось $x+3y-4-x-y=$ $=2y-4$

Витя решил $2x+y$ задач, а надо ему решить $a=x+3y-4$, т.е. осталось ~~решить~~ $2y-x-4$. См. продолжение.

~~ему решить~~ $x+3y-4-2x-y=$

Тогда, т.к. Боре осталось решить в 3 раза больше задач, то $(2y-4)\cdot 3=$ $2y-x-4$. Заметим, что число $2y-4 \geq 2y-x-4$, т.к. $x \geq 0$. 1) Если $x>0$, то равенства $(2y-4)\cdot 3 = 2y-x-4$ не может быть, т.к. $2y-x-4 < 2y-4$. (число $2y-4$ и $-x+2y-4$ ~~поло~~ неотрицательные числа, ~~поэтому~~ т.к. им не может остаться решить отрицательное число задач.) Т.к. $2y-4 > 2y-x-4$, ~~то~~ и числа ~~положительные~~ неотрицательны, то $(2y-4)\cdot 3 > 2y-x-4$.

2) Если $x=0$ должно выполняться равенство $3(2y-4)=2y$ откуда $y=2$. Итак, тогда Аня решила $x+3y+1=$ $=0+3\cdot 2+1=7$ задач

№9 (продолжение)

Вите осталось решить $2y-x-4$ задач, а Боре — $2y-4$. Тогда, т.к. Боре осталось в 3 раза больше, то $3(2y-x-4)=2y-4$

$6y-3x-12=2y-4$

$4y-3x-8=0$

$3x=4y-8 \Rightarrow x=\frac{4y-8}{3}$ т.к. число задач — целое число.

Откуда $\frac{4y-8}{3}\geq 0$, т.е. $y\geq 2$ и $4y-8 \vdots 3$, откуда подходят $y=2$; $y=5$; $y=8$; $y=3k+2$.

т.к во 2 день Боря решил побольше, то

$x=\frac{4y-8}{3}<y$

$4y-8<3y$

$y-8<0$

$y<8$.

Тогда, подходит только $y=5$ и $y=2$.

Если $y=5$, то $x=\frac{4y-8}{3}=4$. Значит, Ане нужно решить 17 задач: $x+3y+1=4+15+1=20$.

Если $y=2$, то $x=\frac{4y-8}{3}=0$. т.е. возможны 2 варианта таблицы

(Если ребята могли решить 0 задач, то картинка может быть 2 ~~[illegible]~~ видов. Если ребята решали ненулевое число задач, то возможна только

	Аня	Боря	Витя
1 день	4	4	8
2 день	15	5	5
осталось	1	6	2
	[illegible]	15	15

	Аня	Боря	Витя
1 день	0	0	0
2 день	6	2	2
осталось	1	0	0

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26978

№10

Выпишем числа в таком виде (двузначные) и однозначные:

00 01 02 03 04 05 ... 09 (1) 45

10 11 12 13 14 15 ... 19 (2) 55

20 21 22 23 24 25 ... 29

...

90 91 92 93 94 95 ... 99. (10)

У первых 10 чисел сумма цифр $-\frac{9\cdot10}{2}=45$. Во (2) строке к каждому начальному числу из строки 0, 1, 2 .. 9 приписали 1, т.е. сумма цифр стала равна $1\cdot10+45=$ $=55$

В 3 ряду (строке) к начальному ряду мы приписали вначале цифру 2, т.е. сумма цифр (строки) стала равна $2\cdot10+45=65$. Аналогично, в 4 ряду к начальному ряду (первому) приписывается 3, т.е. сумма ~~числа~~ 4 ряда (строки) равна $3\cdot10+45=75$. Тогда, в 5 ряду (строке) сумма цифр равна $4\cdot10+45=85$. В 6 ряду $-$ $5\cdot10+45=95$. В 7 ряду $-$ $6\cdot10+45=105$. В 8 ряду (строке) $-$ $7\cdot10+45=115$. В 9 ряду (строке) $-$ $8\cdot10+45=125$. В 10 ряду (строке) $-$ $9\cdot10+45=135$. Сложим эти числа:

$45+1\cdot10+45+2\cdot10+45+3\cdot10+45+...+9\cdot10+45=45\cdot10+10(1+2+...+9)=45\cdot10+10\cdot45=900$. Итак, все такие комбинации двух цифр могут стоять после 1 цифры в трехзначном числе т.е. $\overline{1ab}$. Заметим, что трехзначных чисел, начинающихся с 1 на определенную цифру $-$ 100 штук. Тогда, чтобы просуммировать все трехзначные числа, начинающиеся на определенную цифру достаточно умножить эту цифру на 100 и сложить все возможные двузначные комбинации. Итак, с 1: $1\cdot100+900$, с 2: $2\cdot100+900$ ... с 9: $9\cdot100+900$. Сложим и получим:

$1\cdot100+2\cdot100+...+9\cdot100+900\cdot9=100\cdot45+900\cdot9=12600$.

Добавляем всевозможные двузначные числа, их сумма