ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15356

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	0	3	0	8	8	0	12	16	0	16	63	шестьдесят три	

№8

① $\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{1}{\sin x} = \sin y - \sin x \\ -\frac{1}{\cos x} = \cos y - \cos x \end{cases}$ $\Big| \cdot (-1)$ $\begin{cases} \frac{1}{\sin x} = \sin x - \sin y \\ \frac{1}{\cos x} = \cos x - \cos y \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{\sin x} = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \\ \frac{1}{\cos x} = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{\sin x(2)\cos\frac{x+y}{2}} = \sin\frac{x-y}{2} \\ \frac{1}{-2\cos x\sin\frac{x+y}{2}} = \sin\frac{x-y}{2} \end{cases}$ $\frac{1}{2\sin x\cos\frac{x+y}{2}} = -\frac{1}{2\cos x\sin\frac{x+y}{2}}$

$2\cos x\sin\frac{x+y}{2} = -2\sin x\cos\frac{x+y}{2}$ $\Big| \cdot \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \cos x\sin\frac{x+y}{2} + \sin x\cos\frac{x+y}{2} = 0$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{x+y}{2} + x\right) = 0 = \sin\left(\frac{3x+y}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3x+y}{2} = \pi k$ $3x + y = 2\pi k$ $k \in Z$

$\Downarrow$

$y = -3x + 2\pi k$

② Обратимся к ур-ю $\sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y$ и решим его $\Rightarrow$ $\sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin(-3x + 2\pi k)$ $| \cdot \sin x$

ООЗ

$\sin x \neq 0$

③ $\sin^2 x - 1 = -\sin 3x\sin x \Rightarrow$ $\frac{1-\cos 2x}{2} - 1 = \frac{\cos 4x - \cos 2x}{2}$ $| \cdot 2$

$\cdot \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$1 - \cos 2x - 2 = \cos 4x - \cos 2x$

$\cdot \sin 3x\sin x = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2}$

$\cos 4x = -1 \Rightarrow 4x = 2\pi k_1 + \pi | \cdot \frac{1}{4}$ $k, \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k_1}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k_1}{2}$

$y = -3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k_1}{2}\right) + 2\pi k = -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi k_1}{2} + 2\pi k$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15356

№1

$$A=\frac{\frac{1}{4}+\frac{4}{1}}{\frac{4}{4}+\frac{5}{4}+\frac{9}{4}}+\frac{475}{100}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{16+5+9}{4}}+\frac{475}{100}=\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{30_6}+\frac{475}{100}=$$

$$\frac{475}{100}+\frac{1}{6}=\frac{475\cdot6+100}{600}=$$

$$=\frac{2850+100}{600}\cdot\frac{60}{100}=\frac{2950}{10\cdot100}=\frac{295}{100}=2{,}95$$

Ответ: 2,95

№3

Пусть R - радиус круга рощи, а r - радиус дерева => Составим пропорцию из площадей $S_1=\pi R^2$ $S_2=\pi r^2$ и найдем кол-во деревьев, находящихся в роще =>

$R=258$ м

$r=12$ м

$$\frac{\pi R^2}{\pi r^2}=\frac{258^2}{12^2}=462{,}25 \Rightarrow 462{,}25<2018 \quad \text{Ч.Т.Д.}$$

№4

$$\sqrt{x^3-3x+1}=x-1$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^3-3x+1\geq0 \\ x^3-3x+1=x^2-2x+1 \end{cases} \Rightarrow x^3-3x+1-x^2+2x-1=0 \Rightarrow x^3-x^2-x=0 \Rightarrow$$

$$x(x^2-x-1)=0$$

x^2-x-1 $\qquad x=0$ (не подходит)

$D=1+4=5$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$$

Ответ: $x=\frac{1+\sqrt5}{2}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15356

№5

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{2}{3}$$

- $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
- $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x\Rightarrow$

$\underline{1-\frac{\sin^2 2\alpha}{2}=\sin^4 x+\cos^4 x}$

- $(\sin^2 x+\cos^2 x)^3=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=$

$\underline{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}$

$$\frac{1-\frac{\sin^2 2\alpha}{2}-1}{1-\frac{3\sin^2 2\alpha}{4}-1}=$$

$$=-\frac{\sin^2 2\alpha}{2}\cdot\frac{4}{-3\sin^2 2\alpha}=\frac{2}{3}$$

ч.т.д.

№7

$\sqrt{8x-x^2-7}-\sqrt{11-x}\geq\sqrt{9x-x^2-18}\overset{ОДЗ}{\Rightarrow}$

ОДЗ

$$\begin{cases}8x-x^2-7\geq 0\\ 11-x\geq 0\\ 9x-x^2-18\geq 0\end{cases}$$

$(8x-x^2-7)+(11-x)-2\sqrt{(11-x)(8x-x^2-7)}\geq 9x-x^2-18$

$-2\sqrt{(11-x)(8x-x^2-7)}\geq 9x-x^2-18-11+x-8x+x^2+7$

$-2\sqrt{(11-x)(8x-x^2-7)}\geq 2x-22 \quad \Big| \cdot -\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\sqrt{(11-x)(8x-x^2-7)}\leq 11-x \overset{ОДЗ}{\Longleftrightarrow}$

$(11-x)(8x-x^2-7)\leq(11-x)^2\Rightarrow(11-x)(8x-x^2-7)-(11-x)^2\leq 0$

$(11-x)(8x-x^2-7-11+x)\leq 0\Rightarrow(11-x)(-x^2+9x-18)\leq 0\quad(x-11)(x^2-9x+18)\leq 0$

$x^2-9x+18$ $\begin{cases}x_1+x_2=9\\ x_1\cdot x_2=18\end{cases}$ $\underset{x_1}{3}$ $\underset{x_2}{6}$

x^2-8x+7 $\begin{cases}x_1+x_2=8\\ x_1\cdot x_2=7\end{cases}$ $\underset{x_1}{1}$ $\underset{x_2}{7}$

Обозначим на числовой прямой полученные промежутки и решим неравенство

Ответ: 3; 6.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15356

№10

$(4-2a)x^2+(13a-27)x+33-13a>0$ при $1<a<3$

Решим неравенство относительно $a \Rightarrow 4x^2-2ax^2+13ax-27x+33-13a>0$

$-2ax^2+13ax-13a+4x^2-27x+33>0$

$a(-2x^2+13x-13)+4x^2-27x+33>0$

Пусть $f(a)=a(-2x^2+13x-13)+4x^2-27x+33 \Rightarrow$ График функции представляет собой прямую $\Rightarrow$ Необходимо найти значение x при $a=1$ $a=3$ (на концах) $\Rightarrow$

$f(1)$, $f(3)$

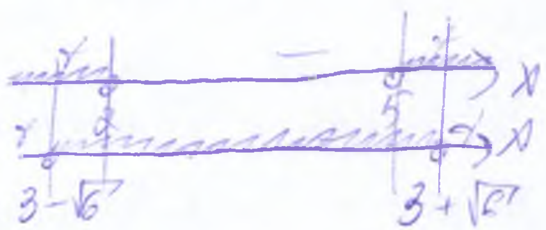
(1) $-2x^2+13x-13+4x^2-27x+33>0$ $\quad 2x^2-14x+20>0 \quad | : 2$

(2) $-6x^2+39x-39+4x^2-27x+33>0$ $\quad -2x^2+12x-6>0 \quad | \cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\begin{cases} x^2-7x+10>0 \\ x^2-6x+3<0 \end{cases}$

$x^2-7x+10$

$\begin{cases} x_1+x_2=7 \\ x_1\cdot x_2=10 \end{cases}$ 5 2; x_1 x_2



x^2-6x+3

$D=36-12=24$

$x_1=\frac{6\pm2\sqrt{6}}{2}=3\pm\sqrt{6}$

6 Ответ: $x\in(3-\sqrt{6};2)\cup(5;3+\sqrt{6})$

№2

8 Пусть x - коэффициент пропорциональность $\Rightarrow$

$\frac{x}{5}+\frac{x}{10}+\frac{3x}{20}+8=\frac{x}{2} \quad | \cdot 20$

~~$(4x+2x+3x+160=10x)$~~ $\quad \frac{10x}{20}-\frac{4x}{20}-\frac{2x}{20}-\frac{3x}{20}=8 \Rightarrow \frac{1}{20}x=8 \Rightarrow$

$x=160$

$\Rightarrow \frac{160}{5}:\frac{160}{2}:\frac{160}{10} \Rightarrow 32:80:16$