ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15444

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	4	4	8	12	12	8	0	0	64	шестьдесят четыре	

1. $A=\dfrac{2^{-2}+2018^0}{(0,5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}}+4,75=\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{4}{4}}{4-5\cdot\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}+4,75=$

$=\dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{16-5+9}{4}}+4,75=\dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{20}{4}}+4,75=\dfrac{5}{20}+4,75=\dfrac{1}{4}+4,75=0,25+4,75=5$

$\frac{5}{100}\cdot 60=5\cdot 0,6=3$

Ответ: 3

2. Пусть „Новатэк" – a
„Роснефть" – b
„ЛУКОЙЛ" – c
„Газпром нефть" – r

По условию: $b=a+c+r+8$ и $a:b:c=\frac{1}{5}:\frac{1}{2}:\frac{1}{10}$ и $0,3b=r$.

$$\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}\\ \frac{b}{c}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}}\\ \frac{a}{c}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{10}}\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{2}{5}\\ b=5c\\ a=2c\end{cases}$$

Тогда
$$\begin{cases}b=a+c+0,3b+8\\ 0,7b=a+c+8\\ 0,7\cdot 5c=2c+c+8\\ 3,5c-3c=8\\ c=16\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}a=32\\ b=80\\ r=24.\end{cases}$$

Ответ: „Новатэк" – 32
„Роснефть" – 80
„ЛУКОЙЛ" – 16
„Газпром нефть" – 24

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15444

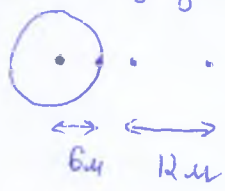
3. Пусть всего в роще x деревьев. Вокруг каждого круга нарисуем круг радиусом 6 м. (они не должны пересекаться и расположены в круге радиуса 258+6). Площадь большого круга должна быть не меньше, чем сумма площади маленьких. Значит,

$264^2\pi > 6^2\pi x$

$x < \frac{264^2}{6^2}$

$x < 44^2$

$x < 1936$, то есть $1936 < 2018$, что и требовалось доказать



Ответ: доказано

5. $\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1} = \frac{2}{3}$

Пусть $\sin^2\alpha = a$ $\cos^2\alpha = b$

Тогда $\begin{cases} 3(a^2+b^2-1) = 2(a^3+b^3-1) \\ a+b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3a^2+3b^2-3 = 2a^3+2b^3-2 \\ a+b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3a^2-2a^3+3b^2-2b^3 = \\ a+b=1 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2(3-2a)+b^2(3-2b)=1 \\ a=1-b \end{cases}$ $\begin{cases} (1-b)^2(3-2(1-b))+b^2(3-2b)=1 \\ a=1-b \end{cases}$

$(1-b)^2(3-2+2b)+b^2(3-2b)=1$

$(1-2b+b^2)(2b+1)+b^2(3-2b)=1$

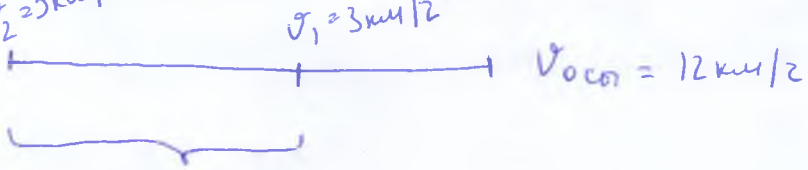
$2b^3 - 4b^2 + 2b + b^2 - 2b + 1 + 3b^2 - 2b^3 = 1$

$-3b^2 + 2b - 2b + 3b^2 + 1 = 1$

$1 = 1$

Ответ: тождество доказано

6.



I прошел $3t+10$

II прошел $5t$

Чтобы найти, расстояние на которое они [illegible]

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15444

Продолжение задания №6.

$5t = 3t + 10$

$2t = 10$

$t = 5 \Rightarrow$ они встр. через 5 ч., значит оса летала 5 ч.

$S_{осы} = vt$

$S_{осы} = 12 \cdot 5 = 60$

Ответ: 60 км.

4. $\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1$

$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1$

ОДЗ: $x^3 - 3x + 1 \geq 0$

$x(x^2 - 3) \geq -1$

$x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \geq -1$

$x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1$

$x^3 - x^2 - x = 0$

$x(x^2 - x - 1) = 0$

$x = 0$, не подх.

$D = 1 + 4 = 5$

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

Ответ: $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

7. $\sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18}$

ОДЗ: $-x^2 + 8x - 7 \geq 0$

$D = 64 + 28 = 92$

$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{92}}{-2}$

$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{92}}{-2}$

$[x_2; x_1]$

$11 - x \geq 0$

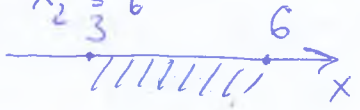
$x \leq 11$

$-x^2 + 9x - 18 \geq 0$

$D = 81 - 72 = 9$

$x_1 = 3$

$x_2 = 6$



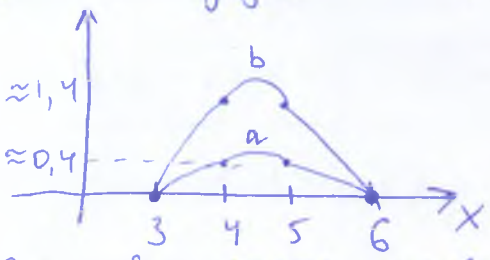
Далее решаем графическим способом.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15444

Продолжение задания №7.



a - левая часть неравенства

b - правая часть неравенства

Ответ: $x \in \{3\}, \{6\}$

8. $\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{1}{\sin x} \\ \cos x - \cos y = \frac{1}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{\sin x} \\ -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$

Поделим первое на второе:

$\begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} \end{cases}$

$-\operatorname{ctg}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \operatorname{ctg} x$

ОДЗ: $\sin x \neq 0$ $\cos x \neq 0$

$x \neq \pi k, k \in Z$ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}$; $y = \frac{5\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{4}$; $y = \frac{7\pi}{4}$

$x = \frac{5\pi}{4}$; $y = \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{7\pi}{4}$; $y = \frac{3\pi}{4}$

10. $\underbrace{(4-2a)}_{a} x^2 + \underbrace{(13a-27)}_{b} x + \underbrace{33-13a}_{c} > 0$

$1 < a < 3$

$D = (13a-27)^2 - 4(4-2a)(33-13a) = 169a^2 - 351a + 729 -$

$- 4(132 - 52a - 66a + 26a^2) = 169a^2 - 351a + 729 - 528 + 208a + 264a -$

$- 104a^2 = 65a^2 + 121a + 201$

$x = \frac{13a-27 \pm \sqrt{65a^2+121a+201}}{}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15444

Продолжение задания №10

$$x_2 = \frac{13a - 27 + \sqrt{65a^2 + 121a + 201}}{2(4 - 2a)}$$

$a = 1$, тогда

$$x_1 = \frac{13 - 27 - \sqrt{65 + 121 + 201}}{4} = \frac{15 - 27 - \sqrt{387}}{4} = -\frac{14 - \sqrt{387}}{4}$$

$$x_2 = -\frac{14 + \sqrt{387}}{4}$$

$a = 3$, тогда

$$x_1 = \frac{39 - 27 - \sqrt{585 + 365 + 201}}{-4} = \frac{12 - \sqrt{1149}}{-4}$$

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{1149}}{-4}.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{14 - \sqrt{387}}{4}; \frac{12 + \sqrt{1149}}{-4}\right) \cup \left(\frac{-14 + \sqrt{387}}{4}; \frac{12 - \sqrt{1149}}{-4}\right)$