



ШИФР

16769

Класс 11 А

Вариант 11

Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания КИИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	4	8	8	12	12	16	16	14	98	увеличить восьмью	

$$1) \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + (2)^{-2}} + 4,75 = \frac{\frac{1}{4} + 1}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} + 4,75 = \frac{5}{4} + 4,75 = \frac{5}{4} + 4,75 = \frac{5}{4} + 4,75 =$$

$$= 0,25 + 4,75 = 5. \quad A = 5 \quad \frac{5 - 100\%}{? - 60\%} \Rightarrow 0,6A = \frac{5 \cdot 60}{100} = \frac{300}{100} = 3.$$

Ответ: 3.

2). Пусть объем добычи газа компании "Коватэк" = $\frac{1}{5}x$, тогда по условию
объемы "Роснефть" и "Лукойл" $\frac{1}{2}x$ и $\frac{1}{10}x$ соответственно.

Если по условию объем добычи газа "Газпром нефть" составляет
30% от объема "Роснефть", то. Объем добычи газа "Газпром
нефть" = $\frac{1}{2} \cdot 0,3x = \frac{3}{20}x$. Поскольку по условию компания "Роснефть"
добыла на 8 млрд. куб. м. больше, чем все остальные компании
вместе, то составим уравнение:

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{5}x + \frac{1}{10}x + \frac{3}{20}x + 8.$$

$$10x = 4x + 2x + 3x + 160.$$

$$x = 160. \Rightarrow 1) V(\text{"Коватэк"}) = 160 \cdot \frac{1}{5} = 32 (\text{млрд. куб. м}).$$

$$2) V(\text{"Роснефть"}) = \frac{1}{2} \cdot 160 = 80 (\text{млрд. куб. м}).$$

$$3) V(\text{"Лукойл"}) = \frac{1}{10} \cdot 160 = 16 (\text{млрд. куб. м}).$$

$$4) V(\text{"Газпром нефть"}) = \frac{3}{20} \cdot 160 = 24 (\text{млрд. куб. м}).$$

Ответ: ~~Коватэк~~ 32 млрд. куб. м; 80 млрд. куб. м, 16 млрд. куб. м,
24 млрд. куб. м.



ШИФР 16769

$$5) \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - 1} = \frac{\sin^2 x (\sin^2 x - 1) + \cos^2 x (\cos^2 x - 1)}{\cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x - \sin^2 x - \cos^2 x} =$$

$$= \frac{-2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x (\sin^2 x - 1) - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x (\cos^2 x - 1) - 3\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{-2\sin^2 x \cos^2 x}{-3\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{2}{3} \quad \text{т.т.т.}$$

7) О.г.з. $\begin{cases} 8x - x^2 - 7 \geq 0 \\ 11 - x \geq 0 \\ 9x - x^2 - 18 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x + x^2 + 7 \leq 0 \\ x \leq 11 \\ x^2 - 9x + 18 \leq 0 \end{cases}$

$D = 64 - 28 = 36$
 $x = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ ~~$\frac{7}{1}$~~ $\frac{7}{1}$

$D = 81 - 72 = 9$
 $x = \frac{9 \pm 3}{2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ ~~$\frac{6}{3}$~~ $\frac{6}{3}$

$[3; 6]$

Перепишем неравенство в виде:

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18} + \sqrt{11 - x} \quad \text{и возведем обе стороны в квадрат:}$$

$$8x - x^2 - 7 \geq 9x - x^2 - 18 + 11 - x + 2\sqrt{(9x - x^2 - 18)(11 - x)}$$

$$2\sqrt{(11 - x)(9x - x^2 - 18)} \leq 0; \quad 4(11 - x)(9x - x^2 - 18) \leq 0; \quad (11 - x)(9x - x^2 - 18) \leq 0;$$

$11 - x = 0; \quad x = -11$ - подкоренное выражение не может быть меньше нуля, значит оно равно нулю.

$9x - x^2 - 18 = 0$
 $D = 81 - 72 = 9; \quad x_1 = 6 \quad x_2 = 3$ С учетом О.г.з. ответ: $x = 3; x = 6$.

$$8) \begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin y \sin x \\ \cos^2 x - 1 = \cos y \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cos^2 x = \sin y \sin x \\ \cos^2 x - 1 = \cos y \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = -\sin y \sin x \\ \cos^2 x - 1 = \cos y \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sin y \sin x - 1 = \cos y \cos x \\ \sin y \sin x + 1 = -\cos y \cos x \end{cases} \quad 1) \cos y \cos x + \sin y \sin x = -1; \quad \cos(y - x) = -1;$$

$$y - x = \pi + 2\pi k; \quad y = x + \pi + 2\pi n$$

$$2) \cos 2x = \cos(\pi + 2\pi n + 2x); \quad \cos^2 x = -\cos 2x; \quad 2\cos 2x = 0; \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{2} k + 2\pi n; \quad y = \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2} (k + 4n);$$

Пусть тогда $k + 4n = m; \quad k, n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2} m = \frac{\pi}{4} (5 + 2m).$

О.г.з: $\sin x \neq 0; \quad \cos x \neq 0. \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} (m + 2k); \quad y = \frac{\pi}{4} (5 + 2m); \quad k \in \mathbb{Z}; \quad m \in \mathbb{Z}.$

9) $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{2}^2} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{k-1}^2 + \sqrt[3]{k}^3 + \sqrt[3]{k-1} + \sqrt[3]{k}^2}$ делим числитель и знаменатель на $\sqrt[3]{k-1}$

выражения по разности кубов $x^3 - y^3 \Rightarrow \frac{(\sqrt[3]{2} - 1)}{(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2}^2 + \sqrt[3]{2} + 1)} +$

$+\frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} + 1)} + \dots + \frac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{(\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1})(\sqrt[3]{k}^2 + \sqrt[3]{k} + 1)} = \sqrt[3]{k} - 1$

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16769

- 6). Ускорения пешехода $\frac{v}{t} = \frac{5-3}{2} = 1 \text{ (км/ч)}; \text{ расстояние между ними } 10 \text{ км} \Rightarrow$
 $\Rightarrow t_{\text{их встречи}} = \frac{10}{2} = 5(2).$
 соответственно это же время проехала лодка осе. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow S_{\text{осе}} = 5 \cdot 12 = 60 \text{ (км)}$

Ответ: осе проехала 60 км.

4) $\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1. \quad \text{О.г.з.: } x^3 - 3x + 1 > 0.$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1.$$

$$x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1.$$

$$x^3 - x^2 - x = 0.$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x^2 - x - 1; D = 1 + 4 = 5; x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right]$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Проверка: $x(0) \Rightarrow \sqrt{0 + 0 + 1} - 0 = -1.$

$$\sqrt{1} \neq -1 \Rightarrow \text{корень не подходит}$$

не удовн. О.г.з.

$$x \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^3 - 3 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + 1} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -1$$

Ответ: нет решений $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

10). $(4 - 2a)x^2 + (13a - 27)x + 33 - 13a > 0.$
 $(-2x^2 + 13x - 13)a + 4x^2 - 27x + 33 > 0$

$$D = (13a - 27)^2 - 4(4 - 2a)(33 - 13a) \geq 0.$$

$$169a^2 - 702a + 729 - 104a^2 + 472a - 529 \geq 0.$$

$$65a^2 - 230a + 200 \geq 0.$$

$$13a^2 - 46a + 40 \geq 0.$$

$$D = 2116 - 1040 = 1076.$$

$$a = \frac{46 \pm \sqrt{1076}}{26} = \frac{46 \pm 2\sqrt{269}}{26} = \left[\frac{23 + \sqrt{269}}{13}, \frac{23 - \sqrt{269}}{13} \right]$$

$$\begin{cases} (-2x^2 + 13x - 13) + 4x^2 - 27x + 33 \geq 0 \\ (-2x^2 + 13x - 13) \cdot 3 + 4x^2 - 27x + 33 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geq 0, & \begin{cases} (x-2)(x-5) \geq 0 \\ x^2 - 6x + 3 \leq 0, & \begin{cases} (x-3)^2 - 6 \leq 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [5; +\infty) \\ x \in [3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6}) \end{cases}$$

$$x \in [3 - \sqrt{6}; 2] \cup [5; 3 + \sqrt{6})$$

Ответ: $[3 - \sqrt{6}; 2] \cup [5; 3 + \sqrt{6}]$

9) $\frac{1}{1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}^2} + \frac{1}{\sqrt{2}^2 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}^2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(k-1)^2 + 3k + \sqrt{k-1} + 3k^2}} =$