ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30453

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	0	8	8	12	12	10	16	16	90	девяносто	

ШИФР 30453

Задача 1.

$$A=\frac{2^{-2}+2018^{0}}{(0{,}5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4{,}75=\frac{\frac{1}{2^2}+1}{2^2-5\,\frac{1}{2^2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+4{,}75=$$

$$=\frac{\frac{1}{4}+1}{4-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}}+4{,}75=\frac{\frac{5}{4}}{5}+4{,}75=0{,}25+4{,}75=5$$

60% от $A=A\cdot 0{,}6=5\cdot 0{,}6=3$

Ответ: 3

Задача 2. $Н:Р:Л=\frac{1}{5}:\frac{1}{2}:\frac{1}{10}=2:5:1$

$\exists$ Объем добычи $Л=2x$

то $О.д.\ Р=10x$

$О.д.\ Н=4x$

$О.д.\ Г.н=О.д.\ Р\cdot 0{,}3=10x\cdot 0{,}3=3x$

$10x=2x+4x+3x+8$ (по усл.)

$x=8$

$О.д.\ Н=4x=32$ млрд.куб.м.

$О.д.\ Р=10x=80$ млрд.куб.м.

$О.д.\ Л=2x=16$ млрд.куб.м

$О.д.\ Г.н=3x=24$ млрд.куб.м.

Ответ: 32; 80; 16; 24

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30453

Задача 3 $r = 258$ $d = 2\cdot 258 = 516$

$n \le \frac{d}{12}+1 = \frac{516}{12}+1 = 44$ n – кол-во деревьев расставл. по диаметру

N = Всего деревьев $< n^2$ т.к. n^2 – максимальное кол-во деревьев в квадрате со стороной $= d$

$N < n^2 = 44^2 = 1936$

$N < 1936 < 2018$ ч.т.д.

Задача 9

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{k^2-2k+1}+\sqrt[3]{k^2-k}+\sqrt[3]{k^2}} =$$

$$= \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{(k-1)^{\frac{2}{3}}+(k-1)^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}}+k^{\frac{2}{3}}} = \sum_{i=2}^{k} \frac{\sqrt[3]{k-1}-\sqrt[3]{k}}{\cancel{k}-1-\cancel{k}} =$$

$$= \sum_{i=2}^{k} \sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1} = \sqrt[3]{k} - \cancel{\sqrt[3]{k-1}} + \cancel{\sqrt[3]{k-1}} - \cancel{\sqrt[3]{k-2}} + \dots + \cancel{\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{1} =$$

$$= \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{1}$$

минимально при:

k – наименьший куб натур числа, больший 2017

$k = 2197$

Ответ: $k = 2197$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30453

Задача 4

$\sqrt{x^3-3x+1}-x=-1$

$\sqrt{x^3-3x+1}=x-1$

ОДЗ:

$x^3-3x+1\geq 0$ (1)

$x-1\geq 0$

$x\geq 1$ (2)

возведём обе части в квадрат

$x^3-3x+1=x^2-2x+1$

$x^3-x^2-x=0$

$x(x^2-x-1)=0$

$x=0$ не удовл. усл. (2)

$x^2-x-1=0$

$D=1^2+4\cdot 1=5$

$x_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$

$x=\frac{1-\sqrt5}{2}<1$ не удовл. услов. (2)

подставим x_1 в (1)

$\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^3-3\frac{1+\sqrt5}{2}+1=\frac{1+3\sqrt5+3\cdot 5+5\sqrt5}{8}-3\frac{1+\sqrt5}{2}+1=$

$=2+\sqrt5-1{,}5-1{,}5\sqrt5+1=1{,}5-\frac{\sqrt5}{2}\overset{?}{>}0$

$1{,}5>\frac{\sqrt5}{2}$

$\sqrt{2{,}25}>\sqrt{\frac{5}{4}}$

$2{,}25>1{,}25$

$\Rightarrow x_1$ удовл. ОДЗ

Ответ: $x=\frac{1+\sqrt5}{2}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30453

Задача 5.

Док-ть: $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2}{3}$

Док-во: (1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (Основное тригоном. тождество)

1) возведём обе части (1) в квадрат (т.к. они положит.)

$\sin^4\alpha+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha=1$

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1=2\cos^2\alpha\sin^2\alpha$

2) возведём обе части (1) в куб

$\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^4\alpha+3\cos^2\alpha\sin^4\alpha+\cos^6\alpha=1$

$\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\underbrace{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}_{=1}+\cos^6\alpha=1$

$\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^6\alpha=1$

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1=3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{2}{3}$ ч.т.д.

Задача 6.

V сближения путешественников $= 5$ км/ч $- 3$ км/ч $= 2$ км/ч

$t_1 = t$ до встречи путешественников $=\dfrac{10\text{ км}}{2\text{ км/ч}}=5$ ч

t_1 = времени когда муха туда сюда летала

$S=t_1\cdot V_{мухи}=5\text{ ч}\cdot 12\text{ км/ч}=60$ км

Ответ: 60

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30453

Задача 7.

$\sqrt{8x-x^2-7}-\sqrt{11-x}\geq\sqrt{9x-x^2-18}$ (1)

Домножим обе части неравенства на

$\left(\underbrace{\sqrt{8x-x^2-7}}_{\geq 0}+\underbrace{\sqrt{11-x}}_{\geq 0}\right)\geq 0$ знак не меняется,

т.к. сумма двух неотриц. чисел = неотриц. число

Слева получим разность квадратов

$8x-x^2-7-(11-x)\geq$

$\geq\sqrt{9x-x^2-18}\left(\sqrt{8x-x^2-7}+\sqrt{11-x}\right)$

$9x-x^2-18\geq\sqrt{9x-x^2-18}\left(\sqrt{8x-x^2-7}+\sqrt{11-x}\right)$

Заметим, что при $x=3$ и $x=6$

обе части нер-ва обращаются в ноль

$\Rightarrow x=3$ и $x=6$ решения нер-ва

$\exists\, x\neq 3$ и $x\neq 6$

ОДЗ:

$8x-x^2-7\geq 0$

$x^2-8x+7\leq 0$

$(x-7)(x-1)\leq 0$ $\boxed{1\leq x\leq 7}$

Корни квадр. трехчлена по т. Виета

$11-x\geq 0$ $\boxed{x\leq 11}$

$9x-x^2-18\geq 0$

$x^2-9x+18\leq 0$

$(x-3)(x-6)\leq 0$ $\boxed{3\leq x\leq 6}$

$\begin{cases}1\leq x\leq 7\\ x\leq 11\\ 3\leq x\leq 6\end{cases}\Rightarrow \boxed{3\leq x\leq 6}$

Разделим обе части на $\sqrt{9x-x^2-18}>0$ знак не меняется

$\sqrt{9x-x^2-18}\geq\sqrt{8x-x^2-7}+\sqrt{11-x}$ (2)

из (2) следует, что $\sqrt{9x-x^2-18}\geq\sqrt{8x-x^2-7}$, т.к. $\sqrt{11-x}\geq 0$

из (1) следует, что $\sqrt{8x-x^2-7}\geq\sqrt{9x-x^2-18}$, т.к. $\sqrt{11-x}\geq 0$

что возможно тогда и только тогда, когда

$\sqrt{9x-x^2-18}=\sqrt{8x-x^2-7}$

$9x-\cancel{x^2}-18=8x-\cancel{x^2}-7$

$x=11$, не удовл. ОДЗ: $x\in[3;6]$ других решений нет

Ответ: $x=3$, $x=6$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30453

Задача 8.

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y & / \times \sin x \quad (1) \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y & / \times \cos x \end{cases}$$

$$+\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases}$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} - 2 = \sin x \sin y + \cos x \cos y$$

$$\cos(x-y) = -1 \Rightarrow x - y = \pi + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = y + \pi + 2\pi n$$

подставим в (1)

$$\sin(y+\pi+2\pi n) - \frac{1}{\sin(y+\pi+2\pi n)} = \sin y$$

$$\sin(y+\pi+2\pi n) = \sin(y+\pi) = -\sin y$$

т.к. 2π – период

$$-\sin y + \frac{1}{\sin y} = \sin y \quad / \times \sin y$$

$$2\sin^2 y = 1; \quad \sin^2 y = \frac{1}{2}; \quad \sin y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin y = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k \qquad y = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, \; m \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = \pm\frac{\pi}{4} + \pi l, \; l \in \mathbb{Z}$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$x = y + \pi + 2\pi n = \pm\frac{\pi}{4} + \pi l + \pi + 2\pi n$$

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{4} + \pi l + \pi + 2\pi n; \; \pm\frac{\pi}{4} + \pi l\right)$ $n, l \in \mathbb{Z}$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30453

Задача 10.

$$(4-2a)x^2+(13a-27)x+33-13a>0 \quad \text{для всех } a\in(1;3)$$

$$\underbrace{a(13x-2x^2-13)+(4x^2-27x+33)}_{f(a)}>0$$

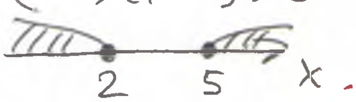
$f(a)$ – линейная функция $\Rightarrow$ $f(a)>0$ на интервале от 1 до 3 тогда и только тогда, когда $\begin{cases} f(1)\geq 0 \\ f(3)\geq 0 \end{cases}$

$f(1)=(13x-2x^2-13)+(4x^2-27x+33)=2x^2-14x+20$

$2x^2-14x+20\geq 0$

$x^2-7x+10\geq 0$ $\qquad x^2-7x+10=0$

$(x-2)(x-5)\geq 0$ $\qquad x=2 \quad x=5$ по т. Виета

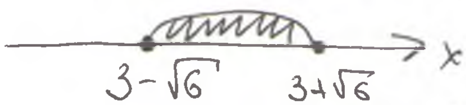


$f(3)=3(13x-2x^2-13)+(4x^2-27x+33)=-2x^2+12x-6$

$-2x^2+12x-6\geq 0$ $\qquad x^2-6x+3=0$

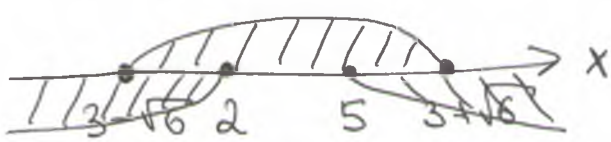
$x^2-6x+3\leq 0$ $\qquad D_1=3^2-1\cdot 3=6$

$x=3\pm\sqrt{6}$



$\sqrt{6}>\sqrt{4}=2 \Rightarrow \sqrt{6}>2$

$3-\sqrt{6}<3-2=1 \qquad 3+\sqrt{6}>3+2=5$



$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3-\sqrt{6}\leq x\leq 2 \\ 5\leq x\leq 3+\sqrt{6} \end{array}\right.$

Ответ: $x\in[3-\sqrt{6};2]\cup[5;3+\sqrt{6}]$