ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15778

Класс 9 **Вариант** 1-2 **Дата Олимпиады** 10.02.18

Площадка написания МГТУ имени Н. Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	~~4~~ 5	~~4~~ 5	~~4~~ 5	~~8~~ 5	~~6~~ 3	~~12~~ 5	~~12~~ 15	~~14~~ 12	~~16~~ 20	~~12~~ 15	~~92~~ 90	~~девяносто два~~ девеносто	

① $4 \cdot \dfrac{3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{6}}{1,5} = 4 \cdot \dfrac{3\frac{4}{6} - 2\frac{1}{6}}{1,5} = 4 \cdot \dfrac{1\frac{1}{2}}{1,5} = 4$

~~4~~ 5

Ответ: 4

④ $\sqrt{2x-3} < 3$

$\begin{cases} 2x-3 \geq 0; \\ \sqrt{2x-3} < 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-3 \geq 0; \\ 2x-3 < 9; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x \geq 3; \\ 2x < 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1,5; \\ x < 6; \end{cases}$ $1,5 \leq x < 6$

~~8~~ 5

Ответ: 2

⑤ $\dfrac{4-x}{4x+5} \leq -2$

$\dfrac{4-x}{4x+5} + 2 \leq 0$; $\dfrac{4-x+8x+10}{4x+5} \leq 0$; $\dfrac{7x+14}{4(x+1\frac{1}{4})} \leq 0$; $\dfrac{x+2}{x+1\frac{1}{4}} \leq 0$

$\Downarrow$

$-2 \leq x < -1\frac{1}{4}$ не подходит

Целочисленные решения: ~~2~~

-2, -1

~~6~~ 3

Ответ: ~~2~~ 1

⑦ $\sqrt{-x^2-x+12} = 3x-9$

$\begin{cases} 3x-9 \geq 0; \\ -x^2-x+12 = 9x^2-54x+81; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3; \\ 10x^2-53x+69=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3; \\ x^2-5,3x+6,9=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2,3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=3$

$x^2 - 5,3x + 6,9 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 2,3 \\ x = 3 \end{array}\right.$ по обратной теореме Виета

~~12~~ 15

Ответ: 3

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

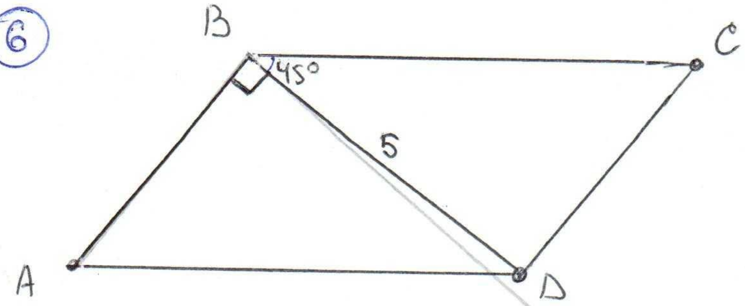
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15778

(6)



Дано: ABCD - параллелограмм; $\angle ABD = 90°$; $\angle CBD = 45°$; $BD = 5$;

Найти: S_{ABCD}

Решение

1) $AD \parallel BC$ (по усл.)
BD - секущая
$\angle CBD = 45°$ (по усл.)
$\angle CBD$; $\angle BDA$ - накрест лежащие
$\Rightarrow \angle CBD = \angle BDA$ (по свойству параллельных прямых) $\Rightarrow$
$\Rightarrow BDA = 45°$

2) ΔABD - прямоугольный (по усл.)
$\angle BDA = 45°$ (по док.)
$\Rightarrow \angle BAD = 45°$ (по свойству прямоуг. треугольника)

3) ΔBAD - прямоуг.
$\angle BDA = 45°$
$\angle BAD = 45°$ (по док.)
$BD = 5$ (по усл.)
$\Rightarrow \Delta BAD$ - равнобедр. (по признаку равнобедр. треугольника) $\Rightarrow$
$\Rightarrow BD = AB = 5$
$\cos 45° = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD = \frac{AB}{\cos 45°}$ $AD = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5\sqrt{2}$

4) ABCD - параллелограмм
$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\angle BAD$
$AB = 5$ (по док.)
$AD = 5\sqrt{2}$ (по док.)
$\angle BAD = 45°$ (по док.)
$\Rightarrow S_{ABCD} = 5 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sin 45° = 25\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 25$

~~12~~ 5

Ответ: 25

(2) Пусть расстояние от A до B равно S(км), начальная скорость равна v $\left(\frac{км}{ч}\right)$

$v \cdot 2{,}5 = S \quad | \cdot 4$
$10v = 4S$

$(v + 20) \cdot 2 = S + 15$
$2v + 25 = S \quad | \cdot 5$
$10v + 125 = 5S$
$4S + 125 = 5S$
$S = 125$

Расстояние от A до B (S) равно 125 км

~~4~~ 5

Ответ: 125 км

Отраслевая олимпиада школьников ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15778

(8) Если число $n \in \mathbb{Z}$ и делится на 4, то $n=4k$, где $k \in \mathbb{Z}$

$(4k)^2 - 188 \cdot 4k + 2752 < 0$

$16k^2 - 188 \cdot 4k + 2752 < 0$

$k^2 - 47k + 172 < 0$

$(k-4)(k-43) < 0$

$4 < k < 43$

т.к. $k \in \mathbb{Z}$, то $k = 5; 6; 7; \ldots; 42$ удовл. этому неравенству, а значит и $n = 4\cdot5, 4\cdot6, \ldots; 4\cdot42$ удовлетворяют этому неравенству

$\sum\limits_{k=5}^{42} 4k = 4(5+6+7+\ldots+42) = 4 \cdot \frac{5+42}{2} \cdot 38 = 4 \cdot 47 \cdot 19 = ~~1786~~$ 3752 ~~14~~ 12

Ответ: 1786

(3) $\left(\left(\sqrt{mn} - \frac{mn}{m+\sqrt{mn}}\right) : \frac{\sqrt[4]{mn} - \sqrt{n}}{m-n} - m\sqrt{n}\right)^2 : \sqrt[3]{mn\sqrt{mn}} =$

$= \left(\left(\frac{m\sqrt{mn} + mn - mn}{m+\sqrt{mn}}\right) : \frac{\sqrt[4]{n}(\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})} - m\sqrt{n}\right)^2 : \sqrt[3]{\sqrt[2]{m^3n^3}} =$

$= \left(\frac{m\sqrt{mn} \cdot (\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})}{\sqrt{m}(\sqrt{m}+\sqrt{n}) \cdot \sqrt[4]{n}(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})} - m\sqrt{n}\right)^2 : \sqrt[6]{m^3n^3} =$

$= \left(m\sqrt[4]{n}(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}) - m\sqrt{n}\right)^2 : \sqrt{mn} = \left(m(\sqrt[4]{mn}+\sqrt{n}) - m\sqrt{n}\right)^2 : \sqrt{mn} =$

$= \left(m(\sqrt[4]{mn}+\sqrt{n}-\sqrt{n})\right)^2 : \sqrt{mn} = \frac{(m\sqrt[4]{mn})^2}{\sqrt{mn}} = \frac{m^2\sqrt{mn}}{\sqrt{mn}} = m^2$

При $m=3$, $n=3{,}3$:

$m^2 = 9$

~~4~~ 5

Ответ: m^2; 9

(10) Заметим, что сумма всех сумм цифр чисел до 100 равна (т.к. двухзначные числа это 11, 12, 13, … 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 10)

$(0 + (1+2+3+\ldots+9)) + (10 + (1+2+\ldots+9)) + \ldots + (90 + (1+2+\ldots+9)) =$

= Соответственно сумма цифр всех чисел от 10 до 99 =

$= (1\cdot10 + (1+2+\ldots+9)) + (2\cdot10 + (1+2+\ldots+9)) + \ldots + (9\cdot10 + (1+2+\ldots+9)) =$

$= (1+2+3+\ldots+9)\cdot10 + (1+2+\ldots+9)\cdot9 = 45\cdot19 = 855$ +

Обозначим это за S

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 15778

Сумма всех цифр трехзначных чисел (100, 101, 102 .... 998, 999)

На первом месте стоит {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и для каждой из них мы перебрали на последующих двух всевозможные двухзначные числа. Тогда сумма цифр всех чисел от 100 до 999

$(1\cdot100+S)+(2\cdot100+S)+\ldots+(9\cdot100+S)=$

$=(1+2+3+4+\ldots+9)\cdot100+9S=45\cdot100+9S$

$S=(0\cdot10+(1+2\ldots+9))+\ldots+(9\cdot10+(1+2+3\ldots+9))=$

$=(1+2+\ldots+9)\cdot10+(1+2+3+\ldots+9)\cdot10=2\cdot45\cdot10$

$\Downarrow$

$45\cdot100+9S=45\cdot100+2\cdot45\cdot9\cdot10=450\cdot19$

Теперь сложим сумму цифр всех чисел от 10 до 99, от 100 до 999 и 1000.

$45\cdot19+450\cdot19+1=19\cdot495+1=\cancel{9306}$

Ответ: 9306

~~12~~ 15

(9) Пусть изначально у Бори и у Вити было x задач, в I д. Боря решил y задач, во II д. Боря решил m задач, в конце у Вити осталось n задач

$x, y, m, n \in \mathbb{N}$

	Аня	Боря	Витя
Было	$x+5$	x	x
в I д.	y	y	$2y$
во II д.	$3m$	m	m
Ост.	1	$3n$	n

$$\begin{cases} x+5=y+3m+1; \\ x=y+m+3n; \\ x=2y+m+n; \end{cases} \cdot(-1)$$

$y=2n$

$$\begin{cases} x+5=2n+3m+1; \\ x=2n+m+3n; \\ x=2n+m+n; \end{cases} \cdot(-1)$$

$$\begin{cases} x+5=2n+3m+1; \\ x=6{,}5n+2; \\ x=4n+m+n; \end{cases}$$

$5=2m+1-3n$

$2m=3n+4$

$m=\frac{3n}{2}+2$

т.к. $m\in\mathbb{N}$ $n\,\vdots\,2 \Rightarrow$ (n – четное)

Нам сказано, что во второй день Боря решил побольше задач, чем в первый

$\Downarrow$

$m>y$

$\frac{3n}{2}+2>2n$

$3n+4>4n$

$n<4$

~~16~~ 20

т.к. n – четное, $n\in\mathbb{N}$, $n<4$

$\Downarrow$

$n=2$

Проверка:

	Аня	Боря	Витя
Было	20	15	15
в I день	4	4	8
во II день	15	5	5
Осталось	1	6	2

Ответ: у Ани было 20 задач