



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16446

Класс 10 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	—	8	8	12	12	2	16	2	68	шестьдесят восемь	

Задание №1

Найдем 60% от выражения А, то есть 0,6А.

$$A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + (\frac{2}{3})^{-2}} + 4,75 = \frac{0,25 + 1}{4 - 1,25 + 2,25} + 4,75 = \frac{1,25}{5} + 4,75 = 0,25 + 4,75 = 5$$

$$0,6A = 0,6 \cdot 5 = 3$$

Ответ: 3

Задание №2

Обозначим объемы газов как Н, Р, Л, Г по первым буквам.

Пусть $H:P:A = \frac{1}{5} : \frac{1}{2} : \frac{1}{10} = 2:5:1$. Пусть $L = x$, тогда $H = 2x$, $P = 5x$.

$$G = 30\% \cdot P = 0,3 \cdot 5x = 1,5x$$

$$P = G + L + H + 8$$

$$5x = 1,5x + x + 2x + 8$$

$$0,5x = 8$$

$$x = 16 \text{ (мрд. м}^3\text{)}$$

Ответ: 32; 80; 16 и 24 мрд. м³ соответственно (в порядке Н-Р-Л-Г)

Задание №5

$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$$

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ (основное тригонометрическое тождество).

$$\frac{\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^6 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^6 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)(\sin^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)(\cos^2 \alpha + 1)}{(\sin^2 \alpha + 1)(\sin^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + 1)(\sin^2 \alpha - 1) + (\cos^2 \alpha + 1)(\cos^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - 1)(\cos^2 \alpha + 1)} = \frac{2}{3}$$

Пусть $\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) = \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + 1)(\sin^2 \alpha - 1) = X$, а $\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1) = \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1)(\cos^2 \alpha - 1) = Y$

$3(X+Y) = 2(\sin^2 \alpha + 1) \cdot X + 2(\cos^2 \alpha + 1) \cdot Y$ (можно домножить т.к. знаменатели обеих частей не могут быть равны 0).

$$3(X+Y) = 2X + 2Y + 2\sin^2 \alpha X + 2\cos^2 \alpha Y$$

$$X+Y = 2\sin^2 \alpha X + 2\cos^2 \alpha Y$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



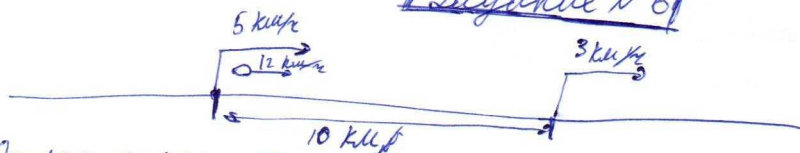
ШИФР 16446

Предложение №5

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1) &= 2 \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)) + 2 \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)) \\ (\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)) (1 - 2 \sin^2 \alpha) &= (\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)) (2 \cos^2 \alpha - 1) \\ \text{[} \sin^2 \alpha - 1 = -\cos^2 \alpha \text{]} \quad \text{[} \cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha \text{]} \quad \text{[} 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \text{]} \quad \text{[} 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \text{]} \\ (\sin^2 \alpha \cdot (-\cos^2 \alpha)) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= (\cos^2 \alpha \cdot (-\sin^2 \alpha)) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

$1 = 1$, что верно. Теперь предположим действия в обратном порядке, получив в итоге указанное равенство, что и является его доказательством.

Задача №6



Относительная скорость отставшего путешественника относительно первого $= (5 \text{ км/ч} - 3 \text{ км/ч}) = 2 \text{ км/ч}$. Значит он сократит отставание до нуля за 5 часов $(= \frac{10 \text{ км}}{2 \text{ км/ч}})$. Все это время она движется со скоростью 12 км/ч. Выходит, что она пройдет путь $= (12 \text{ км/ч} \cdot 5 \text{ ч}) = 60 \text{ км}$.

Ответ: 60 км

Задача №7

~~$\sqrt{8x-x^2-7} - \sqrt{11-x} \geq \sqrt{9x-x^2-18}$~~
~~Разведем обе части в квадрат. Неравенство сохраним, т.к. обе части~~
~~положительны, т.к. правая положительна, а левая больше нее.~~
 ~~$\sqrt{8x-x^2-7} - \sqrt{11-x} - 2 \sqrt{(11-x)(8x-x^2-7)} \geq \sqrt{9x-x^2-18}$~~
~~Уберем модуль, ведь знаки почленно в левых выражениях являются положительными,~~
~~значит отрицательный знак не меняет.~~
 ~~$8x-x^2-7-11+x-2\sqrt{(11-x)(8x-x^2-7)} \geq 9x-x^2-18$~~
 ~~$98 \geq 9x-18-x^2-9x+x^2+18 \geq 2\sqrt{(11-x)(x-7)(x-1) \cdot (-1)}$~~
 ~~$0 \geq 2\sqrt{-(11-x)(x-7)(x-1)}$~~
~~Но правая часть ≥ 0 из-за корней, выходит, что она равна нулю.~~
 ~~$0 = 2\sqrt{-(11-x)(x-7)(x-1)}$~~
 ~~$0 = -(11-x)(x-7)(x-1)$~~
~~Произведение равно нулю если один из множителей равен нулю. Получим 3 корня:~~
 ~~$x=11$; $x=7$; $x=1$; Однако $x=11$ не входит в область определения, т.к.~~



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 16446

Задача №8

Перенесем $\sqrt{11-x}$

$$\sqrt{8x-x^2-7} \geq \sqrt{9x-x^2-18} + \sqrt{11-x}$$

Обе части положительны, возведем их в квадрат (из положительности следует сохранение неравенства).

~~Вместо $\sqrt{11-x}$~~

$$8x-x^2-7 \geq 9x-x^2-18+11-x+2\sqrt{(x-3)(x-6)(11-x)}$$

$$8x-x^2-7 \geq 8x-x^2-7+2\sqrt{(x-3)(x-6)(11-x)}$$

$$0 \geq 2\sqrt{(x-3)(x-6)(11-x)}$$

$$0 \geq \sqrt{(x-3)(x-6)(11-x)}$$

✓

12

Но $\sqrt{(x-3)(x-6)(11-x)} \geq 0$, выходит, что $\sqrt{(x-3)(x-6)(11-x)} = 0$ $(x-3)(x-6)(11-x) = 0$

Произведение равно 0, когда один из множителей равен 0.

$$\begin{aligned} x &\leq 3 \\ x &\leq 6 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Корни, но $x=11$ не входит в область определения, а $x=3$ и $x=6$ входят, в чем можно убедиться подставив эти значения и рассмотрев на положительность подкоренных выражений.

Ответ: $x=3$ и $x=6$. ✓

Задача №9

$$\sqrt[3]{x^2-2k+1} + \sqrt[3]{k^2-k} + \sqrt[3]{k^2} = (k-1)^{\frac{1}{3}} + (k(k-1))^{\frac{1}{3}} + (k)^{\frac{2}{3}} = \frac{k-(k-1)}{\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}}$$

$$\text{Значит } \frac{1}{\sqrt[3]{k^2-2k+1} + \sqrt[3]{k^2-k} + \sqrt[3]{k^2}} = \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}$$

Выходит, что ряд выглядит как $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1}) + (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) + \dots + (\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}) = \sqrt[3]{k} - 1$.

Упорядочивая, когда k является точкой куба. Первый точный куб > 2017

$$\text{Это } 13^3 = 2197$$

Ответ: $k=2197$ ✓

Задача №10

$$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33-13a > 0$$

$$-2b^2 + (13b-1)x - 13b + 7 > 0$$

$$b(-2x^2 + 13x - 13) + 7 - x > 0$$

Пусть $b = a-2$, тогда неравенство должно удовлетворяться для $-1 < b < 1$

Пусть $x = \text{const}$, тогда $7-x = \text{const}$; $-2x^2 + 13x - 13 = \text{const}$, тогда

Достаточно будет условие, что минимальное значение левой части (при каком-то b , $-1 < b < 1$) будет > 0 . А минимально оно при $b=1$ или при $b=-1$, в зависимости от положительности/нет значения $-2x^2 + 13x - 13$.

Значит достаточно выполнить неравенства при $b=1$ и $b=-1$

$$1) -2x^2 + 13x - 13 + 7 - x > 0$$

$$-2x^2 + 12x - 6 > 0$$

$$-x^2 + 6x - 3 > 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{36-12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$x \in \left(\frac{3 - \sqrt{24}}{2}, \frac{3 + \sqrt{24}}{2} \right)$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



$$x = -3 \pm \sqrt{6} \quad x \in (-3 - \sqrt{6}; -3 + \sqrt{6})$$

$$2) 2x^2 - 13x + 13 + 7 - x > 0$$

$$x^2 - 7x + 10 > 0$$

$$(x-2)(x-5) > 0$$

$$x_1 = 2; x_2 = 5 \quad x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$$

Оба условия должны выполняться, значит рассматриваем объединение множеств, а так как $-3 + \sqrt{6} < 2$ это $x \in (-3 - \sqrt{6}; -3 + \sqrt{6})$

Ответ: при $x \in (-3 - \sqrt{6}; -3 + \sqrt{6})$

2

Задача №4

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1$$

$$1) x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^3 - x^2 - x = 0$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x^3 - 3x + 1 \geq 0$$

$$x^3 - 3x + 1 \geq x^2 - 2x + 1$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

8

из этих корней подходит при проверке только $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Ответ: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Задача №8

$$\sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y$$

$$\sin x^2 - 1 = \sin y \cdot \sin x$$

$$-\cos^2 x = \sin y \cdot \sin x$$

$$-\sin^2 x + \cos y \cdot \cos x$$

$$\sin^4 x = \cos^2 y \cdot \cos^2 x$$

$$\sin^4 x = \cos^2 y \cdot \sin y \cdot \sin x \cdot (-1)$$

$$\sin^3 x = \cos^2 y \cdot \sin y \cdot (-1)$$

$$\sin x (\cos y \cdot \cos x) = \cos y \cdot \cos x \cdot \sin y \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} \sin x = -\sin y \\ \cos x = \pm \cos y \end{cases}$$

2