ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

**ШИФР** 17669

Класс 10 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания МГТУ имени Баумана

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ Цифрой | Σ Прописью | Подпись |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | 4 | 4 | 4 | — | — | — | 12 | 8 | 15 | — | 47 | сорок семь | |

№7 $\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{7-2x}\geq\sqrt{8x-x^2-12}$

ОДЗ: $\begin{cases}6x-x^2-5\geq 0\\ 7-2x\geq 0\\ 8x-x^2-12\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-6x+5\leq 0\\ 2x\leq 7\\ x^2-8x+12\leq 0\end{cases}$ $\begin{cases}(x-5)(x-1)\leq 0\\ x\leq 3{,}5\\ (x-6)(x-2)\leq 0\end{cases}$

1 2 3,5 5 6 x

$\boxed{x\in[2;3{,}5]}$

$\sqrt{6x-x^2-5}\geq\sqrt{8x-x^2-12}+\sqrt{7-2x}$ $\uparrow^2$

$6x-x^2-5\geq 8x-x^2-12+7-2x+2\sqrt{(7-2x)(8x-x^2-12)}$

$6x-5\geq 6x-5+2\sqrt{(7-2x)(8x-x^2-12)}$

$2\sqrt{(7-2x)(8x-x^2-12)}\leq 0$ $\quad 1:2>0$

$\sqrt{(7-2x)(8x-x^2-12)}\leq 0$ $\uparrow^2$

$(7-2x)(8x-x^2-12)\leq 0$

$(2x-7)(x^2-8x+12)\leq 0$

$(x-3{,}5)(x-6)(x-2)\leq 0$

− + − +
2 3,5 6 x

проверка ОДЗ $(x\in[2;3{,}5])$ $\Rightarrow x=2;\ x=3{,}5$

Отв: $\{2\};\ \{3{,}5\}$ ✓ 12

№1 $A=?$ $\quad 0{,}1A=B\Rightarrow A=\frac{B}{0{,}1}=10B$ $\qquad 64^{\frac{1}{3}}=(4^3)^{\frac{1}{3}}=4^1=4$

1) $B=\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+(0{,}2)^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt3}+\sqrt{2-\sqrt3}\right)^2}\cdot(2{,}017)^0\cdot\sqrt{0{,}36}=\dfrac{3^{10}\cdot\frac{1}{(3^3)^3}+5^4\cdot\frac{1}{5^4}+64^{\frac{1}{3}}}{2+\sqrt3+2-\sqrt3+2\sqrt{(2+\sqrt3)(2-\sqrt3)}}\cdot 1\cdot 0{,}6=$

$=\dfrac{\frac{3^{10}}{3^9}+\frac{5^4}{5^4}+4}{4+2\sqrt{4-3}}\cdot\frac{3}{5}=\dfrac{3+1+4}{4+2}\cdot\frac{3}{5}=\dfrac{8\cdot\frac{3}{5}}{6}=\dfrac{4\cdot 3}{3\cdot 5}=\boxed{\frac{4}{5}}$

2) $A=10B=10\cdot\frac{4}{5}=8$

Отв.: 8 ✓ 4

ШИФР 17669

№2

| | V | t (ч) | A |
|---|---|---|---|
| 4н | $\frac{3x+y}{33}$ | $\boxed{11}$ | $\boxed{x+\frac{y}{3}}$ |
| 3н | $\frac{3x+y}{44}$ | $\frac{44x}{3x+y}$ | $\boxed{x}$ |
| н | $\frac{3x+y}{4\cdot 33}$ | $\frac{y\cdot 4\cdot 33}{4(3x+y)}$ | $\boxed{\frac{y}{4}}$ |
| 3н | $\frac{3x+y}{44}$ | ? $\frac{y44}{3x+y}$ | $\boxed{y}$ |

$\boxed{18}$ (для двух средних строк, $t$)

- Пусть вместимость 1-го танкер – $x$, второго – $y$
- 1 насос – н $\Rightarrow$ $V_н$ – скорость одного насоса
- Данные в рамке – то, что дано по условию; остальное заполняется по ходу решения

1) $V_{4н} = \frac{3/x+\frac{y}{3}}{11} = \frac{3x+y}{33}$

т.к. все насосы одинаковые $\Rightarrow$ ~~их~~ их скорости работы будут равны (работоспособности) $\Rightarrow V_н = \frac{V_{4н}}{4}$

2) $V_н = \frac{3x+y}{4\cdot 33} \Rightarrow V_{3н} = 3V_н = \frac{3(3x+y)}{4\cdot \cancel{33}_{11}} = \frac{3x+y}{44}$

Заполним таблицу далее.

3) Заполнив таблицу, выяснили, что нам нужно найти $\frac{44y}{3x+y}$ (ч); получили ур-е:

$$\frac{44x}{3x+y} + \frac{33y}{3x+y} = 18 \quad | \cdot 3x+y \neq 0 \quad y \neq -3x$$

$$44x + 33y = 18\cdot 3x + 18y$$

$$15y = 10x \quad | : 5$$

$$3y = 2x$$

$$x = \frac{3}{2}y$$

4) подставим полученный $x$ в искомое выражение:

$$\frac{44y}{3x+y} = \frac{44y}{3\cdot\frac{3}{2}y+y} = \frac{44y}{\frac{9}{2}y+\frac{2}{2}y} = \frac{44y}{\frac{11y}{2}} = \frac{\overset{4}{\cancel{44}}y\cdot 2}{\cancel{11}y} = 8 \text{ (ч)}$$

Отв.: 8 часов ✓ 4

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

**Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!**

**ШИФР** 17668

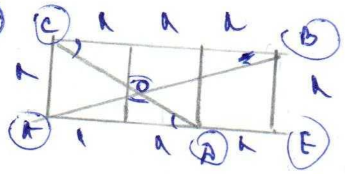
№4 $(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)=\frac{1}{4}x$

$\sqrt{(1+x)(1-x)}+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-1=\frac{1}{4}x$

ОДЗ: $\begin{cases}1+x\geq 0\\ 1-x\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq -1\\ x\leq +1\end{cases}$

$x\in[-1;1]$

№3



$\angle(AB, CD)=\angle COA$

1. Т.к. по усл. ACBE состоит из трех квадратов, обозначим сторону каждого из них буквой $a$

2. Т.к. по усл. ACBE состоит из трех квадратов, рассмотрим два прямоугольных треугольника - ACD ($\angle CAD=90^0$) и ABE ($\angle BEA=90^0$)

- в $\triangle ACD$ по т. Пифагора:

$CD^2=AC^2+AD^2=a^2+4a^2\Rightarrow CD^2=5a^2\Rightarrow CD=a\sqrt{5}$

- в $\triangle ABE$ по т. Пифагора:

$AB^2=BE^2+AE^2=a^2+9a^2\Rightarrow AB^2=10a^2\Rightarrow AB=a\sqrt{10}$

3. Т.к. по усл. ACBE состоит из трех квадратов $\Rightarrow$

$\Rightarrow CB\parallel AE$ (ACBE - прямоугольник) $\Rightarrow\angle BCD=\angle CDA$

(н/л при $CB\parallel AE$ и CD - секущ.)

4. Рассмотрим $\triangle OCB$ и $\triangle AOD$. В них:

✓ $\angle COB=\angle AOD$ - вертикальн.
✓ $\angle BCO=\angle CDA$ (по доказанному выше)

$\Rightarrow$ $\triangle OCB$ и $\triangle AOD$ по 2 углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{CB}{AD}=\frac{CO}{OD}=\frac{BO}{AO}$

$CO=CD-OD$ $\quad$ $OB=AB-AO$

$\frac{3a}{2a}=\frac{CO}{OD}$ $\qquad$ $\frac{3a}{2a}=\frac{BO}{AO}$

$3OD=2CO$ $\qquad$ $3AO=2BO$

$3OD=2CD-2OD$ $\qquad$ $3AO=2(AB-AO)$

$5OD=2CD$ $\qquad$ $3AO=2AB-2AO$

$OD=\frac{2\cdot a\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $5AO=2AB$

$AO=\frac{2AB}{5}=\frac{2\cdot a\sqrt{10}}{5}=\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{5}}$

5. по т. cos в $\triangle AOD$:

$\cos AOD=\frac{AO^2+OD^2-AD^2}{2OD\,AO}=\frac{\frac{4\cdot 2a^2}{5}+\frac{4a^2}{5}-4a^2}{2\cdot\frac{2a}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{5}}}=\frac{4a^2\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}-1\right)}{\frac{8\sqrt{2}a^2}{5}}=$ $(AD=2a)$

$=\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{2\sqrt{2}}{5}}=-\frac{2\cdot 5}{5\cdot 2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. $\cos COA=-\cos AOD$ ($\angle COA+\angle AOD=180^0$ - смежные) $\Rightarrow$

$\Rightarrow\cos COA=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\angle COA=45^0$

Отв.: $45^0$ ✓

4

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

**Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!**

**ШИФР** 17669

№8 $$\frac{1}{(x+2014)(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)(x+2017)}+\frac{1}{(x+2017)(x+2018)}=\frac{1}{999999}$$

Замена: $x+2014=t$

$$\begin{cases} x\neq -2014 \\ x\neq -2015 \\ x\neq -2016 \\ x\neq -2017 \\ x\neq -2018 \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{1}{t(t+1)}+\frac{1}{(t+1)(t+2)}}+\underbrace{\frac{1}{(t+2)(t+3)}+\frac{1}{(t+3)(t+4)}}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{t+2+t}{t(t+1)(t+2)}+\frac{t+4+t+2}{(t+2)(t+3)(t+4)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{2t+2}{t(t+1)(t+2)}+\frac{2t+6}{(t+2)(t+3)(t+4)^2}\ \frac{1}{999999}$$

$$\frac{2\cancel{(t+1)}}{t\cancel{(t+1)}(t+2)}+\frac{2\cancel{(t+3)}}{(t+2)\cancel{(t+3)}(t+4)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{2}{t(t+2)}+\frac{2}{(t+2)(t+4)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{2}{t+2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+4}\right)=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{2}{t+2}\left(\frac{t+4+t}{t(t+4)}\right)=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{2}{t+2}\cdot\frac{2(t+2)}{t(t+4)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{4\cancel{(t+2)}}{\cancel{(t+2)}t(t+4)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{4}{t(t+4)}=\frac{1}{999999} \qquad |\cdot t(t+4)\neq 0$$

$$4=\frac{t(t+4)}{999999} \qquad |\cdot 999999$$

$$4\cdot 999999=t^2+4t$$

$$t^2+4t-4\cdot 999999=0$$

$$D_1=k^2-ac=4+4\cdot 999999=4(1+999999)=4\cdot 10^6$$

$$t_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-2\pm\sqrt{4\cdot 10^6}}{1}$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-2+2\cdot 10^3 \\ t=-2-2\cdot 10^3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t=-2+2000 \\ t=-2-2000 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t=1998 \\ t=-2002 \end{array}\right. \qquad \underline{t=x+2014} \quad \left[\begin{array}{l} x+2014=1998 \\ x+2014=-2002 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=1998-2014 \\ x=\cancel{3}-2002-2014 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-16 \\ x=4016 \end{array}\right.$$

15

Отв.: $-16;-4016$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

**Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!**

**ШИФР** 17669

№8

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases} \uparrow^2$$

ОДЗ: $(\cos x > 0)$

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 - \cos^2 x \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x \end{cases} \oplus$$

$$\cos x + \cancel{\cos y} + \sin x - \cancel{\cos y} = 1$$

$$\cos x + \sin x = 1$$

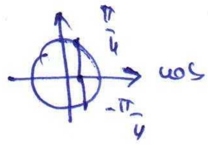
$$\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

$$2\cos\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\cos\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = 1$$

$$2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$




$$\left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

$y = ?$

8

ответ: ?