

Класс 10 Б Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	3	2	8	8	12	12	16	—	—	65	Шестьдесят пять	

N1

$$A = \frac{2^{-2} \cdot 2018^0}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4,75 =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} + 1}{0,25 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} + 4,75 = \frac{\frac{5}{4}}{4 + 1} + 4,75 = \frac{5}{4 \cdot 5} + 4,75 =$$

$$0,25 + 4,75 = 5 \checkmark$$

$$60\% \text{ от } A = 0,6 A = 0,6 \cdot 5 = 3$$

$$\text{Ответ: } 0,6 A = 3 \checkmark$$

(4)

N4

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1$$

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1$$

$$x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^3 - x^2 - x = 0$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \checkmark$$

$$\text{ОДЗ: } x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1 \checkmark$$

$$x^3 - 3x + 1 \geq 0$$

(N5)

$$x \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$x \geq 1$

Ответ: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ✓

Проверка: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^3 - 3 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 > 0$

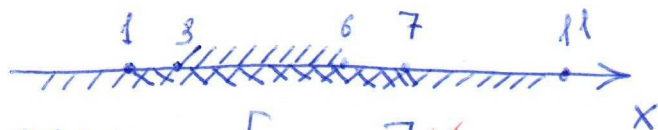
~~$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^3 - 3 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 > 0$~~
 ~~$\frac{1+3\sqrt{5}+3+5}{8} - \frac{3+3\sqrt{5}}{2} + 1 > 0$~~
 ~~$\frac{9+3\sqrt{5}}{8} - \frac{3+3\sqrt{5}}{2} + 1 > 0$~~
 ~~$\frac{9+3\sqrt{5}-12-12\sqrt{5}+8}{8} > 0$~~
 ~~$\frac{-3-9\sqrt{5}}{8} > 0$~~

(N7)

$$\sqrt{8x-x^2-7} - \sqrt{11-x} \geq \sqrt{9x-x^2-18}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-8x+7 \leq 0 \\ 11-x \geq 0 \\ x^2-9x+18 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-7) \leq 0 \\ x \leq 11 \\ (x-3)(x-6) \leq 0 \end{cases}$$



ОДЗ: $x \in [3; 6]$ ✓

$$\begin{aligned} \sqrt{8x-x^2-7} - \sqrt{11-x} &\geq \sqrt{9x-x^2-18} \\ -2x+22 &\geq 2\sqrt{8x-x^2-7} \cdot \sqrt{11-x} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11-x &\geq \sqrt{8x-x^2-7} \cdot \sqrt{11-x} \\ 11-x &\geq \sqrt{x^3-19x^2+95x-77} \end{aligned}$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 20223

(N7)

$$121 - 22x + x^2 > x^3 - 19x^2 + 95x - 77$$

$$x^3 - 20x^2 + 107x - 198 \leq 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 20x^2 + 107x - 198 \\ - x^3 - 3x^2 \\ \hline -17x^2 + 107x - 198 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-3 \\ \hline x^2 - 17x + 66 \end{array}$$

$$-17x^2 + 107x$$

$$-17x^2 + 51x$$

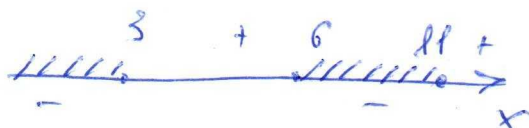
$$66x - 198$$

$$66x - 198$$

0

$$(x-3)(x^2 - 17x + 66) \leq 0$$

$$(x-3)(x-6)(x-11) \leq 0 \quad \checkmark$$



$$\begin{cases} x \leq 3 \\ 6 \leq x \leq 11 \\ 3 \leq x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 3$;
 $x_2 = 6$ ✓

12

(N5)

$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$$



(N5)

$$\begin{aligned} 1) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha = \\ &= \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1) = \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \\ &+ \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \\ &= -2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1 &= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \\ &= \sin^6 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^6 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha (\sin^4 \alpha - 1) + \cos^2 \alpha (\cos^4 \alpha - 1) = \\ &= \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)(\sin^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)(\cos^2 \alpha + 1) = \\ &= -\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha (2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \\ &= -\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha (2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = -3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ &= -2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

$$3) \frac{-2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{-3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3} \quad \checkmark \quad (8)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

это и требовалось дока-ть.

(N6)

1-й путеш.	4 км/ч	t, ч	S, км	
2-й путеш.	3 км/ч	t, ч	3t км	
оба	5 км/ч	t, ч	5t км	$\Delta S = 10 \text{ км}$ ✓
	12 км/ч	t, ч	12t км (S _{общ})	

относ. сот путешественников = 5 км/ч - 3 км/ч = 2 км/ч ✓
т.к. оба будут передвигаться то же время, что требуется
2-й путешественнику, чтоб догнать 1-го то
 $\frac{\Delta S}{v_{от}} = t = \frac{S_{общ}}{v_{общ}}$, откуда $S_{общ} = \frac{\Delta S}{v_{от}} \cdot v_{общ} = \frac{10 \text{ км}}{2 \text{ км/ч}} \cdot 12 \text{ км/ч} = 60 \text{ км}$ ✓ (12)



(№6)

Ответ: $S_m = 60 \text{ км}$ ✓

(№8)

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin y \cdot \sin x \\ \cos^2 x - 1 = \cos y \cdot \cos x \end{cases}$$

ОДЗ: $\sin x \neq 0$

$\cos x \neq 0$ ✓

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} -\sin^2 x = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2} \\ -\cos^2 x = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \end{cases} \textcircled{+}$$

$$-(\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos(x-y) \quad \text{---}$$

$$\cos(x-y) = -1 \quad \checkmark$$

$$\underline{x-y=\pi} \Rightarrow x=\pi+y \quad \text{подстановка}$$

$$\cos^2(\pi+y) - 1 = \cos y \cdot \cos(\pi+y)$$

$$\cos^2 y - 1 = \cos y \cdot (-\cos y)$$

$$2\cos^2 y = 1$$

$$\cos^2 y = \frac{1}{2}$$

$$\cos y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{2}k = \frac{5}{4}\pi + \frac{\pi}{2}k$$

Ответ: $(\frac{5}{4}\pi + \frac{\pi}{2}k, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k)$
 $k \in \mathbb{Z}$

(16)

N2

$$H = 2x \text{ млрд. куб. м. м}^3$$

$$P = 5x \text{ млрд. м}^3$$

$$A = x \text{ млрд. м}^3$$

$$Г = 0,3 \cdot 5x = 1,5x \text{ млрд. м}^3$$

$$5x = 2x + x + 1,5x + 8$$

$$5x = 4,5x + 8$$

$$0,5x = 8$$

$$x = 16 \checkmark$$

$$5x + 2x + x + 1,5x = 9,5x$$

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\ P & H & A & Г & & & P+H+A+Г \end{array}$$

$$16 \cdot 9,5 = 152 \text{ млрд. м}^3$$

Ответ: 152 млрд. м³ см. условие! (3)

N3

Деревья, находящиеся на окр-та, записывают S в 2 раза меньше

$$r = \frac{12}{2} = 6 \text{ см} \checkmark$$

$$R' = R - r$$

$$S_2 = (258^2 - 252^2) \pi =$$

$$S_1 = (R^2 - r^2) \pi = 252^2 \pi$$

на S. деревьев: $\frac{252^2 \pi}{6^2 \pi} = \left(\frac{252}{6}\right)^2 = 42^2$

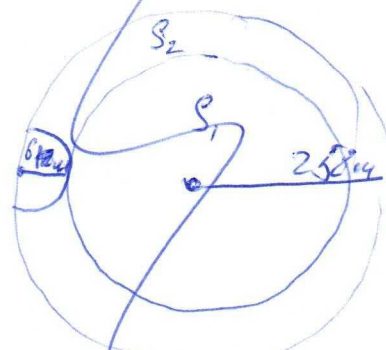
1764 деревьев

$$6 \cdot (258 + 252) \pi = 6 \cdot 510 \pi$$

(2)

N3

Деревья, находящиеся на окр-та записывают м-го в 2 раза меньше



$$S_1 = (258^2 - 252^2) \pi = 234^2 \pi$$

на этой м-го пошлетесь

$$\frac{234^2 \pi}{(12^2 \pi)} \cdot 8 = \left(\frac{234}{12}\right)^2 \cdot 8 =$$

$$39^2 = 1521 - 71 = 1529$$

$$S_2 = 258^2 - 252^2$$