



$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$E = mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

Казанский национальный исследовательский
технологический университет (Математика)

Шифр

89499 Класс

9

Вариант 32

Дата

19.02.2022



6. Пусть всего x акций Разнефти по a тысяч рублей, y акций Дванефти по b тысяч рублей, цена одной акции Тринефти c равна s тысяч рублей. По условию всего $(x+y)$ акций Тринефти.
Пакет акций Дванефти $by = \frac{1}{3}ax$ - пакета акций Разнефти.
 $3by = ax.$

$$A \quad ax + by = 4by = (x+y)c.$$

$$y(b-c) = x(c-a).$$

$$\frac{y}{x} = \frac{c-a}{b-c}$$

$$\frac{x+y}{x} = \frac{(b-c) + (c-a)}{b-c}$$

$$\frac{x+y}{x} = \frac{b-a}{b-c}$$

$$\frac{x}{x+y} = \frac{b-c}{b-a}$$

$$1 - \frac{x}{x+y} = 1 - \frac{b-c}{b-a}$$

$$\frac{y}{x+y} = \frac{c-a}{b-a}$$

$$\frac{y}{2(x+y)} = \frac{c-a}{2(b-a)} = \frac{a-c}{2(a-b)}$$

Искомое
отношение

числа акций Дванефти:

к общему числу акций

По условию $18 \geq a - b \geq 10, \quad 42 \geq c \geq 18$

$$(x+y)c = 4by$$

$$\frac{y}{x+y} = \frac{c}{4b}$$

$$\frac{y}{2(x+y)} = \frac{c}{8b}.$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Площадка написания

Казанский национальный исследовательский
технологический университет (Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 89499 Класс 9

Вариант 32 Дата 19.02.2022



Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	5	1	0	1	5	2	0	0	5

Оценка цифрами

Оценка прописью

Подпись

0	5	1	0	1	5	2	0	0	5
шестьдесят пять					[Signature]				

1. $x^3 - 22x^3 - \sqrt{21} = 0$. Пусть $x^3 = t$. ИМЕЕМ:

~~$$t^3 - 22t - \sqrt{21} = 0;$$~~

$$t(t^2 - 21) - (t + \sqrt{21}) = 0;$$

$$t(t - \sqrt{21})(t + \sqrt{21}) - (t + \sqrt{21}) = 0;$$

$$(t + \sqrt{21})(t^2 - \sqrt{21}t - 1) = 0;$$

$$\begin{cases} t = -\sqrt{21}; \\ t^2 - \sqrt{21}t - 1 = 0; \end{cases}$$

$$D = 25 > 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{21} - 5}{2}; t_2 = \frac{\sqrt{21} + 5}{2}.$$

$$\begin{cases} x^3 = -\sqrt{21}; \\ x^3 = \frac{\sqrt{21} - 5}{2}; \\ x^3 = \frac{\sqrt{21} + 5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt[3]{21}; \\ x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} - 5}{2}}; \\ x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} + 5}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt[3]{21}; \\ x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} - 5}{2}}; \\ x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} + 5}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt[3]{21}; \\ x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} - 5}{2}}; \\ x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} + 5}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt[3]{21}; \\ x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} - 5}{2}}; \\ x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} + 5}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt[3]{21}; \\ x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} - 5}{2}}; \\ x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} + 5}{2}} \end{cases}$$

~~ОТВЕТ:~~ ОТВЕТ: $x_1 = -\sqrt[3]{21}; x_2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} - 5}{2}}; x_3 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} + 5}{2}}.$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика



Площадка написания

Казанский национальный исследовательский
технологический университет (Математика)

Шифр

89499 Класс

9

Вариант 32

Дата

19.02.2022

$$2. \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{16} + \frac{27}{64} - \frac{81}{256} + \dots \right) \left(\frac{2}{7} - \frac{4}{49} + \frac{8}{343} - \frac{16}{2401} + \dots \right) = \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{16} \right) \left(1 + \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^4 + \dots \right) \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{4}{49} \right) \left(1 + \left(\frac{2}{7} \right)^2 + \left(\frac{2}{7} \right)^4 + \dots \right) = \frac{12-9}{16} \cdot \left(1 + \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^4 + \dots \right) \cdot \frac{14-4}{49} \cdot \left(1 + \left(\frac{2}{7} \right)^2 + \left(\frac{2}{7} \right)^4 + \dots \right).$$

$1; \left(\frac{3}{4} \right)^2; \left(\frac{3}{4} \right)^4; \dots$ - ~~бесконечная~~ БЕСКОНЕЧНАЯ УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ С ПЕРВЫМ ЧЛЕНОМ $b_1 = 1$ И ЗНАМЕНАТЕЛЕМ $q_1 = \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}$, ПОЭТОМУ ЕЁ СУММА $\frac{1}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{16}{7}$.

$1; \left(\frac{2}{7} \right)^2; \left(\frac{2}{7} \right)^4; \dots$ - БЕСКОНЕЧНАЯ УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ С ПЕРВЫМ ЧЛЕНОМ $b_2 = 1$ И ЗНАМЕНАТЕЛЕМ $q_2 = \left(\frac{2}{7} \right)^2 = \frac{4}{49}$, ПОЭТОМУ ЕЁ СУММА $\frac{b_2}{1 - q_2} = \frac{1}{1 - \frac{4}{49}} = \frac{49}{45}$.

Итак, значение искомого выражения $\frac{3}{16} \cdot \frac{16}{7} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{49}{45} =$
 $= \frac{3 \cdot 10}{7 \cdot 45} = \frac{2}{21}.$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

Казанский национальный исследовательский технологический университет (Математика)

Шифр

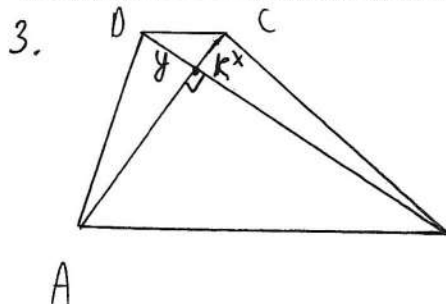
89499 Класс

9

Вариант 32

Дата

19.02.2022



Дано: трапеция $ABCD$, $AC \perp BD$, $AB = 41$, $CD = 24$.
Найти: $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$.

Решение:

Пусть ~~AK~~ $AC \cap BD = K$.

$$\vec{AD} \cdot \vec{BC} = (\vec{AK} + \vec{KD})(\vec{BK} + \vec{KC}) = \underbrace{|\vec{AK}| \cdot |\vec{BK}| \cdot \cos 90^\circ}_{=0} + |\vec{AK}| \cdot |\vec{KC}| \cdot \cos 0^\circ + \underbrace{|\vec{KD}| \cdot |\vec{KC}| \cdot \cos 90^\circ}_{=0} = AK \cdot KC + BK \cdot KD.$$

Пусть $KC = x$, $KD = y$. Тогда по теореме Пифагора в $\triangle KCD$ с $\angle DKC = 90^\circ$ $KC^2 + KD^2 = 24^2$
 $x^2 + y^2 = 24^2$.

Так как $CD \parallel AB$, то $\angle KDC = \angle KBA$ как накрест лежащие углы при $AB \parallel CD$ и секущей BD . Тогда $\triangle DKC \sim \triangle BKA$ по двум углам: $\angle KDC = \angle KBA$, $\angle DKC = \angle BKA = 90^\circ$. Значит, $\frac{BK}{KD} = \frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CD} = \frac{41}{24} \Rightarrow BK = \frac{41}{24} y$; $AK = \frac{41}{24} x$.

$$\text{Итак, } \vec{AD} \cdot \vec{BC} = AK \cdot KC + BK \cdot KD = \frac{41}{24} (x^2 + y^2) = 41 \cdot 24 = 984.$$



4. Подставим $x = -0,5$.

$$f(-0,5) - (-1)f(0,5-1) = 1;$$

$$2f(-0,5) = 1 \Rightarrow f(-0,5) = \frac{1}{2} = 0,5.$$

ТЕПЕРЬ ПУСТЬ $x \neq -0,5$, А ЗНАЧИТ, И $-x-1 \neq -0,5 \Leftrightarrow -x \neq 0,5 \Leftrightarrow x \neq -0,5$.

$$(1) f(x) - (x-0,5)f(-x-1) = 1.$$

Подставим $y = -x-1$.

$$f(y) - (y-0,5)f(-y-1) = 1.$$

$$f(-x-1) - (-x-1-0,5)f(x+1-1) = 1;$$

$$(2) f(-x-1) + (x+1,5)f(x) = 1;$$

$$(2) - (1): (x+0,5)f(x) + f(-x-1)(1 - (-(x-0,5))) = 0;$$

$$(x+0,5)(f(x) + f(-x-1)) = 0 \quad | : (x+0,5) \neq 0, \text{ ТАК КАК } x \neq -0,5.$$

$$0 = f(x) + f(-x-1) \text{ ПРИ ВСЕХ } x \neq -0,5.$$

$$f(x) = -f(-x-1)$$

$$f(x) - (x-0,5)f(-x-1) = 1.$$

$$f(x) + f(-x-1) - f(-x-1)(1+x-0,5) = 1;$$

$$f(-x-1)(4-x-0,5) = -1;$$

$$f(x)(x+0,5) = 1, \quad | : (x+0,5) \neq 0, \text{ ТАК КАК } x \neq -0,5.$$

$$f(x) = \frac{1}{x+0,5}$$

$$\text{ИТАК, } f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{при } x = -0,5; \\ \frac{1}{x+0,5} & \text{при } x \neq -0,5. \end{cases}$$



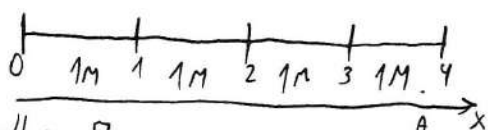
Площадка написания

Казанский национальный исследовательский технологический университет (Математика)

Шифр 89499 Класс 9

Вариант 32 Дата 19.02.2022

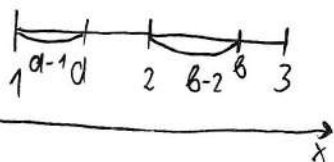
5. ~~Ж~~ Так как расстояние от магистральной газовой трубы до газовых плит не меньше 1 м, а соединяет их участок исходной трубы, то длина этого участка ≥ 1 м. Значит, нам не обязательно найти вероятность того, что все три образовавшиеся участка имеют длину не меньше 1 м.



~~Ж~~ Пусть координаты начала трубы - точка 0, координата конца - 4, координата первой ржавчины - a , второй - b .

Длина первого участка - a м; второго - $(b-a)$ м; третьего - $(4-b)$ м.

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ b-a \geq 1 \\ 4-b \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1; \\ b-a \geq 1; \\ b \leq 3 \end{cases}$$



— обе ржавчины находятся на этом отрезке.

При этом, так как $b-a \geq 1$, то точка 2 принадлежит отрезку $[a; b]$. Значит, a лежит на отрезке $[1; 2]$,

а точка b лежит на отрезке $[2; 3]$.

$$b-a = (b-2) + (2-a)$$

$$1 = 2 - 1 = (2-a) + (a-1)$$

$$b-a = (b-2) + (2-a) = (b-2) + 1 - (a-1) \geq 1 \Rightarrow b-2 \geq a-1.$$

Вероятность того, что $b-2 \geq a-1$, ~~в случае, когда~~ точки лежат на соответствующих отрезках, равна $\frac{1}{2}$, так как отрезки $[1; 2]$ и $[2; 3]$ имеют равную длину, на них выбирают по произвольной точке и затем сравнивают расстояния от этих точек до начала отрезка, на котором они лежат.

При этом вероятность того, что $a \in [1; 2] = \frac{1}{4}$, того, что $b \in [2; 3] = \frac{1}{4}$. Значит, вероятность того, что и $a \in [1; 2]$ и $b \in [2; 3] = \frac{1}{16}$. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$.