ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30166

Класс 10 **Вариант** 12 **Дата Олимпиады** 10.02.18

Площадка написания МГТУ имени Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	—	2	6	—	—	12	14	—	—	38	тридцать восемь	

№1.

$$B = \frac{3^{10}\cdot(3^3)^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}\cdot(5^2)^{-2} + \cancel{2}(4^3)^{+\frac{1}{3}}}{\cancel{\sqrt{}}\, 2+\cancel{\sqrt{3}}+2-\cancel{\sqrt{3}}+2\sqrt{4-3}} \cdot 1\cdot 0{,}6 =$$

$$= \frac{3^{10}\cdot 3^{-9} + 5^4\cdot 5^{-4} + 4}{4+2}\cdot 0{,}6 = \frac{3+1+4}{4+2}\cdot 0{,}6 = \frac{8\cdot \cancel{0{,}6}^{0{,}1}}{\cancel{6}} = 0{,}8$$

4

$0{,}1A = \cancel{0{,}1}B \Rightarrow A = \frac{0{,}8}{0{,}1} = 8$ $\quad 1 \quad \geq 7 \quad \geq 1$

Ответ: 8 ✓

№8.
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos x + \cos y - (1-\cos^2 x) = 0 \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos x + \cos y - 1 = 0 \\ \cos^2 x = \sin x - \cos y \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin x - \cancel{\cos y} + \cos x + \cancel{\cos y} - 1 = 0 \quad (1) \\ \cos y = \sin x - \cos^2 x \end{cases}$$

(1) $\sin x + \cos x = 1$ ✓

Разделим на $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \exists\ \varphi$, что $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; Например, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left[\begin{aligned} x + \tfrac{\pi}{4} &= \tfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ x + \tfrac{\pi}{4} &= \tfrac{3\pi}{4} + 2\pi m, m\in\mathbb{Z} \end{aligned}\right.; \quad \left[\begin{aligned} x &= 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ x &= \tfrac{\pi}{2} + 2\pi m, m\in\mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

Вернёмся в систему

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30166

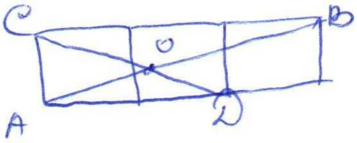
$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=2\pi n, n\in Z\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z\end{array}\right.\\ \cos y=\sin x-\cos^2 x\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\pi n, n\in Z\\ \cos y=0-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z\\ \cos y=1-0\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\pi n, n\in Z\\ \cos y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z\\ \cos y=1\end{cases}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\pi n, n\in Z\\ y=\pi+2\pi n, n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z\\ y=2\pi m, m\in Z\end{cases}\end{array}\right.$ Ответ: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\pi n, n\in Z\\ y=\pi+2\pi n, n\in Z\end{cases} ?\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z\\ y=2\pi m, m\in Z\end{cases} ?\end{array}\right.$ 14

№3. Пусть a - сторона квадратов

1) $\triangle ACB$ - прям-ий: $AC=a$; $BC=3a \Rightarrow tg\angle CAB=\frac{3a}{a}=3 \Rightarrow \angle CAB=arctg\,3$

2) $\triangle CAD$ - прям-ый; $AC=a$, $AD=2a \Rightarrow tg\angle ACD=\frac{2a}{a}=2 \Rightarrow \angle ACD=arctg\,2$



3) $CD\cap AB=O$;

4) $\triangle COA$: $\angle COA=180^\circ-arctg3-arctg2$

Ответ: $\angle COA=180^\circ-arctg3-arctg\,2$ = ? 2

№7. $\sqrt{6x-x^2-5}-\sqrt{7-2x}\geq\sqrt{8x-x^2-12}$

$\sqrt{6x-x^2-5}\geq\sqrt{8x-x^2-12}+\sqrt{7-2x}$

$6x-\cancel{x^2}-5\geq 8x-\cancel{x^2}-12+7-2x+2\sqrt{(7-2x)(8x-x^2-12)}$

$\cancel{6x}-\cancel{6x}-\cancel{5}+\cancel{5}\geq 2\sqrt{(7-2x)(8x-x^2-12)}$

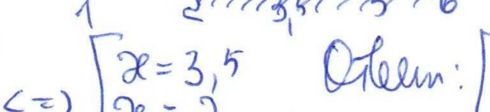
$\sqrt{(7-2x)(8x-x^2-12)}\leq 0$

Т.к. $\sqrt{(7-2x)(8x-x^2-12)}\geq 0 \Rightarrow$ единственный случай, если

$(7-2x)(8x-x^2-12)=0$

$\left[\begin{array}{l}7-2x=0\\ 8x-x^2-12=0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=\frac{7}{2}\\ x^2-8x+12=0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=\frac{7}{2}\\ (x-6)(x-2)=0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=\frac{7}{2}\\ x=6\\ x=2\end{array}\right.$

ОДЗ: $\begin{cases}6x-x^2-5\geq 0\\ 7-2x\geq 0\\ 8x-x^2-12\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-6x+5\leq 0\\ 2x\leq 7\\ x^2-8x+12\leq 0\end{cases}$; $\begin{cases}(x-5)(x-1)\leq 0\\ x\leq 3,5\\ (x-6)(x-2)\leq 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow x\in[2;3,5]$ 12

Имеем: $\begin{cases}x\in[2;3,5]\\ \left[\begin{array}{l}x=6\\ x=3,5\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3,5\\ x=2\end{array}\right.$ Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=3,5\\ x=2\end{array}\right.$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 30166

№4. $(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)=\frac{1}{4}x$

ОДЗ: $x\in[-1;1]$

Домножим на $(\sqrt{1+x}+1)\neq 0$

$((\sqrt{1+x})^2-1)(\sqrt{1-x}+1)=\frac{1}{4}x(\sqrt{1+x}+1)$

$x(\sqrt{1-x}+1)-\frac{1}{4}x(\sqrt{1+x}+1)=0$

$x(\sqrt{1-x}+1-\frac{1}{4}(\sqrt{1+x}+1))=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{1-x}+1-\frac{1}{4}\sqrt{1+x}-\frac{1}{4}=0 \quad (1)\end{array}\right.$$

(1) $\sqrt{1-x}+1-\frac{1}{4}\sqrt{1+x}-\frac{1}{4}=0$

$4\sqrt{1-x}+4-\sqrt{1+x}-1=0$

$4\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+3=0$

$\sqrt{1+x}=4\sqrt{1-x}+3$

$1+x=16\cdot(1-x)+24\sqrt{1-x}+9$

$1+x=16-16x+24\sqrt{1-x}+9$

$17x-24=24\sqrt{1-x}$

$(1-x)24^2=17^2x^2-48\cdot17x+24^2$

$-24^2x=17^2x^2-48\cdot17x$

$289x^2-816x+576x=0$

$289x^2-240x=0$

$x(289x-240)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{240}{289}\end{array}\right.$$

Вернемся в систему

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{240}{289}\end{array}\right. \\ x\in[-1;1]\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{240}{289}\end{array}\right.$$

6

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{240}{289}\end{array}\right.$?