



ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

ШИФР 3342

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

[illegible]

использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

3342

Класс 11

Вариант 6

Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	0	15	15	20	90	девяносто	

1.

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 2) = 5.$$

$$(x^2 + 2x)^2 - 2^2 = 5$$

$$(x^2 + 2x)^2 = 9.$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x = 3 \\ x^2 + 2x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \\ \text{Нет решений} \end{cases}$$

$$D/4 = 1 + 3 = 2^2. \quad x = -1 \pm 2 = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

$$D/4 = 1 - 3 < 0$$

Ответ: 1; -3

2.

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x} \quad OD3: x \geq 3.$$

$$(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3})^2 = 4 \cdot x$$

$$2x+1+x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 4x$$

$$2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = x+2$$

$$4 \cdot (2x+1)(x-3) = (x+2)^2$$

$$8x^2 - 20x - 12 = x^2 + 4x + 4$$

$$7x^2 - 24x - 16 = 0 \quad D/4 = 12^2 + 7 \cdot 16 = 256 = 16^2.$$

$$x = \frac{12 \pm 16}{7} = \begin{cases} 4 \\ < 0 \end{cases} \text{ не подходит по } OD3$$

Ответ: 4.

3.

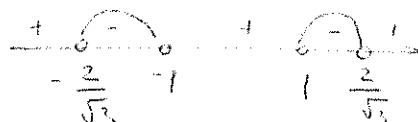
$$\frac{x^2-2}{x^2-1} < -2$$

$$\frac{x^2-2}{x^2-1} + \frac{2x^2-2}{x^2-1} < 0$$

$$\frac{3x^2-4}{x^2-1} < 0 \quad | :3$$

$$\frac{x^2-\frac{4}{3}}{x^2-1} < 0$$

$$\frac{(x - \frac{2}{\sqrt{3}})(x + \frac{2}{\sqrt{3}})}{(x-1)(x+1)} < 0$$



$$2 > \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$$

$$x \in (-\frac{2}{\sqrt{3}}; -1) \cup (1; \frac{2}{\sqrt{3}})$$

Ответ: $(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -1) \cup (1; \frac{2}{\sqrt{3}})$

№ 4

$$\log_4(2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4(\frac{16}{3}) \quad \text{OD3: } x > 1$$

$$\log_4((2x+3)(x-1)) = 2 - (\log_4 16 - \log_4 3) = 2 - 2 + \log_4 3 = \log_4 3$$

$$(2x+3)(x-1) = 3$$

$$2x^2 + x - 3 = 3$$

$$2x^2 + x - 6 = 0 \quad D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49 = 7^2 \quad x = \frac{-1 \pm 7}{4} = \begin{cases} -2 \text{ не лог } x, \text{ по OD3} \\ 1,5 \end{cases}$$

Ответ: 1,5

№ 5.

$$4^x > 4 - 3 \cdot 2^x \quad \text{Пусть } 2^x = t, \text{ где } t > 0 \quad \text{Тогда } 4^x = (2^x)^2 = t^2$$

$$t^2 + 3t - 4 > 0 \quad t^2 + 3t - 4 = 0 \quad D = 9 + 4 \cdot 4 = 25 = 5^2 \quad t = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$$

$$(t+4)(t-1) > 0$$

$$t \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$$

С учетом $t > 0$: $t \in (1; +\infty)$

$$2^x \in (1; +\infty) \Rightarrow x \in (0; +\infty)$$

Ответ: $(0; +\infty)$

№ 7.

$$a_1 = 1; a_5 + a_9 = 6 \quad \text{геометр.}$$

Пусть d - разность арифм. прогрессии Тогда $a_5 = a_1 + 4d$ и $a_9 = a_1 + 8d$

$$a_5 + a_9 = a_1 + 4d + a_1 + 8d = 2a_1 + 12d = 2 \cdot 1 + 12d = 6 \quad 12d = 4$$

Сумма первых 13 членов арифм. прогрессии равна: $S = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot 13 = \frac{a_1 + a_1 + 12d}{2} \cdot 13 =$
 $= \frac{2a_1 + 12d}{2} \cdot 13 = \frac{2 \cdot 1 + 4}{2} \cdot 13 = 39$ Ответ: 39

№6.

Пусть на специальность А зачислялось ежегодно $4k$ студентов, на специальность В - $3k$ студентов, на специальность С - $6k$ студентов. Тогда всего зачислялось ежегодно $13k$ студентов. Однако было принято на $(4+5+6) \cdot 15$ студентов больше.

$$\frac{15}{13k} \cdot 100\% = 7\frac{9}{13}\% = \frac{100}{13}\% \Rightarrow \frac{15}{k} = 1 \Rightarrow k = 15.$$

На специальность А было принято $4k + 4 = 4 \cdot 15 + 4 = 64$ студента,

на специальность В: $3k + 5 = 3 \cdot 15 + 5 = 50$ студентов,

на специальность С: $6k + 6 = 6 \cdot 15 + 6 = 96$ студентов.

Ответ: А 64, В 50, С 96 +

№9

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ \sin x - \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y + 2 \sin x \cos y = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad (1) \\ 2 \sin x \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Подставим (2) в (1):

$$\sin^2 x + \cos^2 y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{4} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит $\sin^2 x + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

$$\begin{cases} \cos y = \cos x \quad (I) \\ \cos y = -\cos x \quad (II) \end{cases} \quad \left(\begin{cases} y = \pm x + 2\pi k \\ y = \pm x + \pi + 2\pi n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z} \right) (*)$$

$$(I) \quad (2) \sin x \cdot \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

Подставив данные решения для x в (I), получим $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$

$$(II) \quad (2) \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m \\ 2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi l \end{cases} \quad m, l \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi m \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi l \end{cases} \quad m, l \in \mathbb{Z}.$$

Подставив данные решения для x в (II), получим $\begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi l \end{cases} \quad m, l \in \mathbb{Z}$

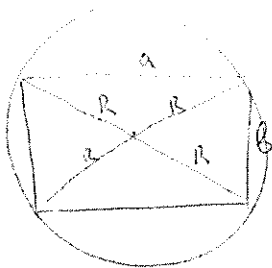
С учетом (*): Ответ: $(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n); (\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n); (-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n) \rightarrow$

ШИФР 3342

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $E = mc^2$ 

№3 (продолжение)

$(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$ Все решения неравенства лежат отсюда, $k \in \mathbb{Z}$.



Т.к. прямоугольник вписан в окружность, то его диагонали пересекаются в центре окружности.

По теореме Пифагора: $a^2 + b^2 = (2R)^2 = 4R^2$

По условию $2S_{\text{пр}} = 2ab = S_{\text{кр}} = \pi R^2$.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4R^2 \\ 2ab = \pi R^2 \end{cases}$$

Сложив уравнения системы, получим $a^2 + 2ab + b^2 = (4 + \pi)R^2$ $(a+b)^2 = (4 + \pi)R^2$
Т.к. $a, b, R > 0$, то $a+b = \sqrt{4+\pi} R$ (1)

Вычтем из 1-го уравнения системы 2-е: $a^2 - 2ab + b^2 = (4 - \pi)R^2$ $(a-b)^2 = (4 - \pi)R^2$
 $a-b = \sqrt{4-\pi} R$ (2) (примем, что $a > b$)

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2a = R(\sqrt{4+\pi} + \sqrt{4-\pi}) \quad a = \frac{R}{2}(\sqrt{4+\pi} + \sqrt{4-\pi}) = 5(\sqrt{4+\pi} + \sqrt{4-\pi})$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}: 2b = R(\sqrt{4+\pi} - \sqrt{4-\pi}) \quad b = \frac{R}{2}(\sqrt{4+\pi} - \sqrt{4-\pi}) = 5(\sqrt{4+\pi} - \sqrt{4-\pi})$$

$$\text{Ответ: } 5(\sqrt{4+\pi} + \sqrt{4-\pi}); 5(\sqrt{4+\pi} - \sqrt{4-\pi})$$

№10.

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = A \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} = x, \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = y$$

$$A = x + y = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2} = \frac{x^3 + y^3}{(x+y)^2 - 3xy} = \frac{x^3 + y^3}{A^2 - 3xy}$$

$$x^3 = 20 + \sqrt{392}$$

$$y^3 = 20 - \sqrt{392}$$

$$xy = \sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})(20 - \sqrt{392})} =$$

$$= \sqrt[3]{400 - 392} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\Rightarrow A = \frac{20 + \sqrt{392} + 20 - \sqrt{392}}{A^2 - 3 \cdot 2} = \frac{40}{A^2 - 6}$$

$$\text{Тогда } A^3 - 6A = 40 \quad A^3 - 6A - 40 = 0.$$

По теореме Безу $40 \nmid A \Rightarrow A_1 = 4$ (путем подстановки $A = 1, 2, \dots$) или
 $(A^3 - 6A - 40) : (A - 4) = A^2 + 4A + 10$ $\Delta_1 = 4^2 - 10 < 0$ решений нет. Значит $A = 4$

Ответ: 4