

ШИФР 30801

Класс 10 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. И.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	—	8	8	12	8	8	16	—	68	шестьдесят восемь	

WS1

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2^{-2} + 2018^0}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 475 = \frac{0,25 + 1}{4 - 1,25 + 2,25} + 4,75 = \\
 &= \frac{1,25}{5} + 4,75 = 0,25 + 4,75 = 5 \quad (4) \\
 0,6 \cdot A &= 0,6 \cdot 5 = 3 \\
 \text{Ответ } 3 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

WS2

Ковачек $\frac{1}{5}$ Роскерт $\frac{1}{2}$ Лукош $\frac{1}{10}$ Гауром керто $0,3 \cdot \text{Роскерт}$

Допустим, что Лукоша = x , то

$2x$ $5x$ x $1,5x$
 т.к. Роскерт добрал больше всех друзей колпачком ка в мрдм³, то можно оставить морель

$$5x = 2x + x + 1,5x + 8$$

$$0,5x = 8$$

$$x = 16 \quad \checkmark$$

тогда Ковачек $2x = 32$
 Роскерт $5 \cdot 16 = 80$
 Лукош 16
 Гауром керто $0,3 \cdot 1,5x = 24$

Ответ Ковачек 32 млрд м³
 Роскерт 80 млрд м³
 Лукоша 16 млрд м³
 Гауром керто 24 млрд м³ (4)



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



$$\begin{aligned} & \sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1 \quad x - 1 \geq 0 \\ & (\sqrt{x^3 - 3x + 1})^2 = (x - 1)^2 \\ & x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \\ & x^3 - x^2 - x = 0 \\ & x(x^2 - x + 1) = 0 \\ & x = 0 \text{ или } x^2 - x + 1 = 0 \\ & \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \\ & x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

Проверим корни, удовлетворяют ли они (имеет ли смысл корень)

$$\begin{aligned} & 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1 \geq 0 + \\ & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 1,5 - 1,5\sqrt{5} + 1,5 \\ & = \frac{16+8\sqrt{5}}{8} - 1,5 - 1,5\sqrt{5} + 1,5 \\ & = 2 + \sqrt{5} - 1,5 - 1,5\sqrt{5} + 1,5 = 1,5 - 0,5\sqrt{5} \\ & = 0,5(3 - \sqrt{5}) \Rightarrow 0,5(3 - \sqrt{5}) \geq 0 + \\ & 3 > \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 1,5 + 1,5\sqrt{5} + 1,5 = \frac{16-8\sqrt{5}}{8} - 1,5 + 1,5\sqrt{5} + 1,5 \\ & = 2 - \sqrt{5} - 1,5 + 1,5\sqrt{5} + 1,5 = 1,5 + 0,5\sqrt{5} \geq 0 + \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{0^3 - 0 + 1} - 0 = -1 \Rightarrow 1 = -1 \Rightarrow 0$ не подходит (т.к. $0 - 1 < 0$)

если $x = 0,5(3 - \sqrt{5})$, то

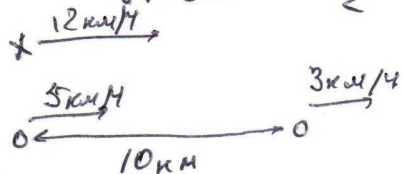
$$\sqrt{\dots} - x - 1 = 1,5 - \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$$

$\Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow \sqrt{\dots} = \text{отриц. число}$

Значит $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ не подходит

$$\begin{aligned} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1-\sqrt{5}-2}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ не подходит} \\ & \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1,5 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \sqrt{5} > 2 \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \geq 0 \text{ подходит} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



З6

Заметим, что мила (х) будет летать со скоростью 12 км/ч. до тех пор пока муравей не встретит

Значит путь который она пройдет равен времени

встречи х скорость мило.

$5 - 3 = 2$ км/ч - скорость муравья

$\frac{10}{2} = 5$ ч - время до встречи

$S_n = 12 \cdot 5 = 60$ км

Ответ: 60 км

12



каждое число имеет вид $\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(k-1)^2} + \sqrt[3]{k(k-1)} + \sqrt[3]{k^2}} = \frac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{(\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1})(\sqrt[3]{(k-1)^2} + \sqrt[3]{k(k-1)} + \sqrt[3]{k^2})} = \frac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{k+1-k} = 1$$

$$\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}$$

т.е. преобразуем все числа так

$$\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} + \dots + \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1} = -\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{k} = \sqrt[3]{k} - 1$$

каждое число имеет вид $\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{при } a \geq 2 \quad b \geq 1$$

$$k \leq 2197 \quad (\sqrt[3]{k} \leq 12 \text{ подходит (и меньше), т.к. } 12^3 = 1728)$$

Ответ 2197

$$x = \sin^2 \alpha \quad y = \cos^2 \alpha$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^3 + y^3 - 1} = \frac{2}{3}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 1 + 2xy - 2xy = (x+y)^2 - 1 - 2xy$$

$$x^3 + y^3 - 1 = x^3 + y^3 - 1 + 3x^2y + 3y^2x - 3x^2y - 3y^2x = (x+y)^3 - 1 - 3x^2y - 3y^2x = (x+y)^3 - 1 - 3xy(x+y)$$

$$x+y = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ тогда } (x+y)^2 = 1$$

то числитель равен $1 - 1 - 2xy = -2xy$

а знаменатель

$$1 - 1 - 3xy = -3xy$$

$$\frac{-2xy}{-3xy} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

30804

$\sqrt{7}$

$$8x - x^2 - 7 \geq 0$$

$$x^2 - 8x + 7 \leq 0$$

$$D \geq 16 - 4 = 12$$

$$x \leq 4 + 3 = 7$$

$$4 - 3 = 1$$

$$x \in [1; 7]$$

$$11 - x \geq 0$$

$$11 \geq x$$

$$9x - x^2 - 12 \geq 0$$

$$x^2 - 9x + 12 \leq 0$$

$$D \leq 81 - 48 = 33$$

$$x \leq \frac{9 \pm 3}{2} \leq 6$$

$$\frac{9 - 3}{2} = 3$$

$$x \in [3; 6]$$

$$x \in [3; 6]$$

возведем обе части в квадрат

$$8x - x^2 - 7 - 11 + x - 2\sqrt{8x - x^2 - 7}\sqrt{11 - x} \geq 9x - x^2 - 12$$

$$-x^2 + 9x - 12 - 2\sqrt{8x - x^2 - 7}\sqrt{11 - x} \geq 9x - x^2 - 12$$

$$-2\sqrt{8x - x^2 - 7}\sqrt{11 - x} \geq 0$$

$$\sqrt{8x - x^2 - 7}\sqrt{11 - x} \leq 0$$

$$\text{корни всегда } \geq 0 \Rightarrow \sqrt{8x - x^2 - 7} = 0 \quad \sqrt{11 - x} = 0$$

$$x \leq 11$$

$$x \leq 11$$

все корни не подходят т.к не входят в промежуток $[3; 6]$

~~Второе неравенство не имеет решений~~

Если $\sqrt{9x - x^2 - 12} = 0$, то левая берна $\Rightarrow x = 3$ и 6 они входят в промежуток $[3; 6]$

Ответ 3 и 6

$$8x - x^2 - 7 + 11 - x - 2\sqrt{8x - x^2 - 7}\sqrt{11 - x} \geq 9x - x^2 - 12$$

$$7x + 4 - 2\sqrt{8x - x^2 - 7}\sqrt{11 - x} \geq 9x - 12$$

$$-2x + 16 \geq 2\sqrt{8x - x^2 - 7}\sqrt{11 - x}$$

$$11 - x \geq \sqrt{8x - x^2 - 7}\sqrt{11 - x}$$

$$121 - 22x + x^2 \geq (8x - x^2 - 7)(11 - x)$$

$$x^2 - 22x + 121 \geq x^3 - 19x^2 + 55x - 77$$

$$x^3 - 20x^2 + 117x - 198 \leq 0 \quad x \in [3; 6]$$

$$\text{или больше } x \text{ или больше } x^3 - 20x^2 + 117x - 198$$

$$\text{Подставим } x = 6, \text{ то } 216 - 720 + 702 - 198 = 0$$

Значит для меньших x снова где меньших x пер-во верно

Ответ $[3; 6]$.

(8)



ШИФР 30801

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



$$\left(\sin x - \frac{1}{\sin x} \right)^2 = (\sin y)^2$$

$$\left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right)^2 = (\cos y)^2$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} = \sin^2 y \\ \cos^2 x - 2 + \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^2 y \end{cases}$$

~~сложим~~
сложим

$$\sin^2 x - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 x - 2 + \frac{1}{\cos^2 x} = \sin^2 y + \cos^2 y$$

$$-2 - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

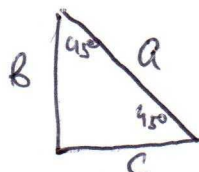
$$4 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\sin x \cdot \cos x)^2} = 4$$

$$\frac{1}{(\sin x \cdot \cos x)^2} = 4$$

$$0,25 = (\sin x \cdot \cos x)^2$$

$$\sin x \cdot \cos x = 0,5$$



$$b = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\sin x = \frac{b}{a}$$

$$\cos x = \frac{c}{a}$$

$$\frac{b \cdot c}{a^2} = 0,5$$

это работает только тогда когда

$$b \text{ и } c \text{ равны, т.е. } \frac{\sqrt{2}}{2} a = b = c \quad \frac{2}{4} a^2 = 0,5$$

знаем $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$$\sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin y$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin y$$

$$\frac{2-2}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin y$$

$$\sin 135 = \sin 45$$

т.е. $y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

т.е. $y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

Ответ $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$

?

8