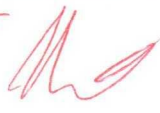


Класс 10 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	3	4	—	12	0	12	16	—	51	51	пятьдесят один	

N1

$$B = \frac{(\frac{1}{3})^{-10} \cdot 2 \cdot 4^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 2 \cdot 5^{-2} + (6 \cdot 4^{-\frac{1}{3}})^{-3}}{(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2} \cdot (2,017)^0 \cdot \sqrt{0,36} = \frac{3^{10} \cdot 3^{-9} + 5^4 \cdot 5^{-4} + (2^6)^{\frac{1}{3}}}{2+\sqrt{3}+2(\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{2-\sqrt{3}})+2-\sqrt{3}} \cdot 1 \cdot 0,6 =$$

$$= \frac{3+1+4}{4+2\sqrt{4-3}} \cdot 0,6 = \frac{8 \cdot 0,6}{6} = 0,8$$

$B = 0,1 A$; $A = 10B = 8$

Ответ: 8 ✓

N4

$$(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = \frac{1}{4}x$$

ОДЗ: $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 1]$

$$\sqrt{(1+x)(1-x)} - \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{4}x$$

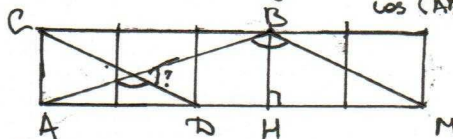
$$\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x} + 1) = \frac{1}{4}x + 1 + \sqrt{1-x}$$

N3

Пусть сторона квадрата равна a .

Построим еще 2 квадрата и построим

$BM \parallel CD$, тогда $\angle(AB; CD) = 180^\circ - \angle ABM$
 $\cos(AB; CD) = -\cos(ABM)$



Пусть $BH \perp AM$, тогда

1) Рассмотрим $\triangle ABH$ — прямоугольный, тогда по т. Пифагора

$$AB = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}$$

$$\sin ABH = \frac{AH}{AB} = \frac{3\sqrt{10}}{10}; \cos ABH = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

2) Рассмотрим $\triangle BHM$ — прямоугольный, тогда по т. Пифагора $BM = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$
 $\sin MBH = \frac{MH}{BM} = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \cos MBH = \frac{BH}{BM} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$3) \cos ABM = \cos(ABH + MBH) = \cos ABH \cdot \cos MBH - \sin ABH \cdot \sin MBH = \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{50}}{50} (1 - 3 \cdot 2) =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{10 \cdot 50} (-5) = \frac{-5\sqrt{2}}{10} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos(AB; CD) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \angle(AB; CD) = 45^\circ$$

Ответ: 45° ✓



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31049

№9

~~Find the value of the expression~~

$$\frac{1}{(x+2014)(x+2015)} + \frac{1}{(x+2015)(x+2016)} + \frac{1}{(x+2016)(x+2017)} + \frac{1}{(x+2017)(x+2018)} = \frac{1}{999999}$$

$$\text{OD3: } x \neq -2014; x \neq -2015; x \neq -2016; x \neq -2017; x \neq -2018$$

$$\frac{(x+2015) - (x+2014)}{(x+2014)(x+2015)} + \frac{(x+2016) - (x+2015)}{(x+2015)(x+2016)} + \frac{(x+2017) - (x+2016)}{(x+2016)(x+2017)} + \frac{(x+2018) - (x+2017)}{(x+2017)(x+2018)} = \frac{1}{999999}$$

$$\frac{(x+2015)}{(x+2014)(x+2015)} - \frac{(x+2014)}{(x+2014)(x+2015)} + \frac{(x+2016)}{(x+2015)(x+2016)} - \frac{(x+2015)}{(x+2015)(x+2016)} + \frac{(x+2017)}{(x+2016)(x+2017)} - \frac{(x+2016)}{(x+2016)(x+2017)} +$$

$$+ \frac{(x+2018)}{(x+2017)(x+2018)} - \frac{(x+2017)}{(x+2017)(x+2018)} = \frac{1}{999999}$$

$$\frac{1}{x+2014} - \frac{1}{x+2015} + \frac{1}{x+2015} - \frac{1}{x+2016} + \frac{1}{x+2016} - \frac{1}{x+2017} + \frac{1}{x+2017} - \frac{1}{x+2018} = \frac{1}{999999}$$

$$\frac{x+2018 - x - 2014}{(x+2014)(x+2018)} = \frac{1}{999999}$$

$$\frac{4}{(x+2014)(x+2018)} = \frac{1}{999999}$$

~~18~~

$$x^2 + 4032x + 4064252 = 3999996$$

$$x^2 + 4032x + 64256 = 0$$

$$(x+16)(x+4016) = 0$$

$$\begin{cases} x = -16 \\ x = -4016 \\ x \neq -2014; x \neq -2015 \\ x \neq -2016; x \neq -2017 \\ x \neq -2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -16 \\ x = -4016 \end{cases}$$

Ответ: $-16; -4016$ ✓ (16)

N8

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 - \cos^2 x \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x \\ \sin x \geq \cos y \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x + \cos y = 1 - \sin x + \cos y \quad (*) \\ \sin x - \cos y = \cos^2 y \quad (2) \\ \sin x \geq \cos y \end{cases}$$

(*) $\sin x + \cos x = 1 \quad \checkmark \quad : \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

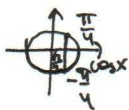
~~$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$~~

~~$\sin x + \cos x = 1$~~

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1, \Rightarrow \exists \varphi, \text{такой что } \begin{cases} \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{например } \varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \checkmark \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \checkmark \end{cases}$$

(2) $\sin x - \cos y = \cos^2 y \quad \checkmark \quad ?$

I $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \sin x = 1$

$$\cos^2 y + \cos y - 1 = 0$$

~~$\cos^2 y + \cos y - 1 = 0$~~

$$\cos^2 y + 2 \cdot \frac{1 - \cos y}{2} = 0$$

$$1 - 2\sin^2 \frac{y}{2} - 2\sin^2 \frac{y}{2} = 0$$

$$\sin^2 \frac{y}{2} = \frac{1}{4}; 1 - \cos^2 \frac{y}{2} = \frac{1}{4}; \cos^2 \frac{y}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1 + \cos y}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\cos y = \frac{1}{2}$$

условие $\sin x \geq \cos y$ выполняется

$$y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$
 $(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$

II $x = 2\pi n \rightarrow \sin x = 0$

$$\cos^2 y = -\cos y$$

$$\begin{cases} \cos y = 0; \text{выполняется } \sin x \geq \cos y \\ \cos y = -1; \text{не выполняется } \sin x \geq \cos y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos y = 0$$

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$$

(12)

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

31049

N6

1) $12+13=25$ км/ч - скорость сближения велосипедистов

2) $\frac{75}{25} = 3$ часа - через сколько времени они встретятся, т.е. в течение этого времени бегала собака

3) $15 \cdot 3 = 45$ км - пробежала собака

Ответ: 45 км $\checkmark$ (12)

N7

$$\sqrt{6x-x^2-5} - \sqrt{4-2x} \geq \sqrt{8x-x^2-12} \quad | \quad \sqrt{6x-x^2-5} + \sqrt{4-2x} \geq \sqrt{8x-x^2-12} \text{ на ОДЗ}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -x^2+6x-5 \geq 0 \\ -2x+4 \geq 0 \\ -x^2+8x-12 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -(x-1)(x-5) \geq 0 \\ x \leq 3,5 \\ -(x-6)(x-2) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [1; 5] \\ x \in (-\infty; 3,5] \\ x \in [2; 6] \end{cases} \Rightarrow x \in [2; 3,5] \checkmark$$

$$\begin{aligned} 6x-x^2-5 - 4+2x &\geq \sqrt{8x-x^2-12} \quad (\sqrt{6x-x^2-5} + \sqrt{4-2x}) \\ -x^2+8x-9 &\geq \sqrt{8x-x^2-12} \quad (\sqrt{6x-x^2-5} + \sqrt{4-2x}) \geq 0 \\ + \sqrt{-x^2+8x-12} &(\sqrt{-x^2+8x-12} - \sqrt{6x-x^2-5} + \sqrt{4-2x}) \geq 0 \end{aligned}$$

Проверим $x=2$
 $\sqrt{12-4-5} - \sqrt{4-4} \geq \sqrt{16-4-12}$
 $\sqrt{3} - \sqrt{0} \geq \sqrt{0}$ - верно
 $x=3$ не входит в ОДЗ, тогда разделим на $\sqrt{6x-x^2-5} + \sqrt{4-2x}$

N2

Пусть x - производительность одного насоса; V_1 - объем первого танкера;
 V_2 - объем второго танкера; t - время, за которое при насоса заполним первый танкер

	A	У	t
I-IV	$V_1 + \frac{1}{3}V_2$	$4x$	11 ч
I-III	V_1	$3x$	t
I	$\frac{1}{4}V_2$	x	$18-t$

Найти: $t = \frac{V_2}{3x} - ?$

Имеем

$$\begin{cases} 44x = V_1 + \frac{1}{3}V_2 \rightarrow V_1 = 44x - \frac{1}{3}V_2 \\ 3xt = V_1 \\ 18x - xt = \frac{1}{4}V_2 \end{cases} \rightarrow t = \frac{V_1}{3x} = \frac{44x - \frac{1}{3}V_2}{3x} = \frac{44}{3} - \frac{1}{9} \frac{V_2}{x} \rightarrow$$

$$(*) \quad 18x - \frac{44}{3}x + \frac{1}{9}V_2 = \frac{1}{4}V_2$$

$$54x - 44x = \frac{3}{4}V_2 - \frac{1}{9}V_2$$

$$10x = \frac{13V_2}{12}; \quad V_2 = \frac{120}{13}x$$

$$t = \frac{V_2}{3x} = \frac{120}{13} \frac{x}{3x} = \frac{40}{13} \text{ ч}$$

Ответ: $\frac{40}{13}$ часов

(3)