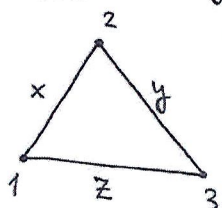


Класс 9 Вариант 41 Дата Олимпиады 19.02.2022
Площадка написания г. Тюмень

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	20	0	18					68	ШЕСТЬДЕСЯТ ВОСЕМЬ	

N6 По условию: (все величины выражены в км)



$$\begin{cases} x+y=3z \\ y+z=x+a \\ x+z=60 \end{cases} \quad \text{Тогда: } \begin{aligned} x &= 60-z \\ y &= 3z-x = 3z-60+z = 4z-60 \end{aligned}$$

Так как $y+z=x+a \Rightarrow 4z-60+z=60-z+a$

$$6z = 120 + a \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{a}{6} + 20 \\ x = 40 - \frac{a}{6} \\ y = \frac{2}{3}a + 20 \end{cases}$$

При выполнении данных условий $\rightarrow$ условия задачи будут верны. Однако не забудем, что $a, x, y, z > 0$.

При выполнении $a > 0$ - сразу будет $z > 0, y > 0$. Однако x может оказаться < 0 : $x = 40 - \frac{a}{6} \leq 0$, т.е. $240 \leq a \Rightarrow$ Чтобы $x > 0$: $a < 240$.

Таким образом указанное расположение возможно при любых $a \in (0; 240)$.

при $a = 30$: $x = 40 - 5 = 35$; $y = 20 + 20 = 40$; $z = 5 + 20 = 25$

Ответ: $a \in (0; 240)$; 35; 40; 25.

N4 Обозначим вместимость ёмкости за 100 ед. и будем выражать в этих единицах измерения ~~всё~~ все требуемые ~~массы~~ объёмы. Дано отливаемой керосином α .

1) Изначально серы в ёмкости $0,02 \cdot 100 = 2$ (ед.). Затем (т.к. керосин однороден) вылили $2 \cdot \alpha$ серы и долили $0,03 \cdot (100 \cdot \alpha) = 3\alpha$ (т.к. долили $100 \cdot \alpha$ керосина) серы. Стало $2 - 2\alpha + 3\alpha = 2 + \alpha$ (ед.) серы.

2) Затем снова отливании на производство ~~до~~ α керосина $\Rightarrow$ стало на $\alpha(2+\alpha)$ меньше серы. & Затем добавили $(100 \cdot \alpha) \cdot 0,015 = 1,5\alpha$ (ед.) серы. В итоге дали серы: 20

$$\frac{2+\alpha - \alpha(2+\alpha) + 1,5\alpha}{100} = 0,02. \quad 2+\alpha - 2\alpha - \alpha^2 + 1,5\alpha = 2. \quad \text{Т.е. } -\alpha^2 + \frac{\alpha}{2} = 0. \Rightarrow$$

$$\alpha\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Но керосин всё-таки отливали} \Rightarrow \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

№2

$$x_0 = \frac{1}{n}; \quad x_i = \frac{1}{n-i} (x_0 + \dots + x_{i-1}); \quad S_n = x_0 + \dots + x_{n-1} = ? \quad (\text{при } n=2021)$$

Обозначим $S_i = x_0 + x_1 + \dots + x_{i-1}$. Тогда $x_i = \frac{1}{n-i} S_i$. Докажем по индукции, что $S_i = \frac{1}{n-i+1}$.

База: $S_1 = x_0 = \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1+1}$.

Переход: Пусть $S_i = \frac{1}{n-i+1}$. Докажем, что $S_{i+1} = \frac{1}{n-(i+1)+1}$.

Шаг: $S_{i+1} = x_0 + \dots + x_{i-1} + x_i = S_i + x_i = S_i + \frac{1}{n-i} S_i = S_i \frac{n-i+1}{n-i} =$

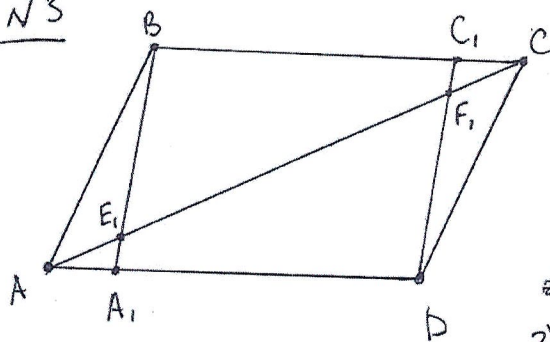
$$= \frac{1}{n-i+1} \cdot \frac{n-i+1}{n-i} = \frac{1}{n-i} = \frac{1}{n-(i+1)+1}, \text{ з.м.г.}$$

$\Rightarrow$ Для любого $i, 1 \leq i \leq n$ - верно - $S_i = \frac{1}{n-i+1}$

$\Rightarrow S_n = \frac{1}{n-n+1} = 1$

Ответ: $S_n = 1$.

№3



Дано:

$$AA_1 = \frac{AD}{2021}$$

$$\frac{AE_1}{AC} = ?$$

1) Отметим на BC точку C_1 такую:

$$\frac{CC_1}{BC} = \frac{1}{2021} \text{ тогда } CC_1 = AA_1, \text{ т.к.}$$

$$AD = BC \Rightarrow A_1D = BC_1.$$

$$\text{Т.к. } A_1D \parallel BC_1 \text{ и } AD = BC_1 \Rightarrow$$

$$A_1BC_1D - \text{параллелограмм. } \Rightarrow E_1A_1 \parallel F_1D$$

$$\Rightarrow BA_1 \parallel C_1D$$

$$\Rightarrow \text{Т.к. } E_1A_1 \parallel$$

$$2) C_1D \text{ пересекает } AC \text{ в точке } F_1. \text{ Т.к. } E_1A_1 \parallel F_1D$$

$$\Rightarrow \frac{AE_1}{AF_1} = \frac{AA_1}{AD} = \frac{1}{2021} \Rightarrow AF_1 = 2021 AE_1 \Rightarrow E_1F_1 = 2020 AE_1$$

$$\text{Аналогично, т.к. } C_1F_1 \parallel BE_1 \Rightarrow \frac{CC_1}{BC} = \frac{CF_1}{CE_1} = \frac{1}{2021} \Rightarrow CE_1 = 2021 CF_1$$

$$\Rightarrow E_1F_1 = 2020 CF_1. \text{ Таким образом } AE_1 = CF_1, \text{ а также } E_1F_1 = 2020 AE_1$$

$$\Rightarrow AC = AE_1 + E_1F_1 + F_1C = 2022 AE_1$$

$$\frac{AE_1}{AC} = \frac{1}{2022}$$

Ответ: $\frac{AE_1}{AC} = \frac{1}{2022}$

$$\sqrt{1} \quad x^9 - 21x^3 - \sqrt{22} = 0$$

1) Пусть $t = x^3$. Решим уравнение; $t^3 - 21t - \sqrt{22} = 0$

$$(t^3 - 22t) + (t - \sqrt{22}) = 0$$

$$t(t^2 - 22) + (t - \sqrt{22}) = 0$$

$$t(t - \sqrt{22})(t + \sqrt{22}) + (t - \sqrt{22}) = 0$$

$$(t - \sqrt{22})(t^2 + t\sqrt{22} + 1) = 0$$

$$\begin{cases} t = \sqrt{22} \\ t^2 + t\sqrt{22} + 1 = 0 \end{cases}$$

2) Решим уравнение:

$$t^2 + \sqrt{22} \cdot t + 1 = 0$$

$$D = 22 - 4 = 18$$

$$t_1 = \frac{-\sqrt{22} + \sqrt{18}}{2}$$

$$t_2 = \frac{-\sqrt{22} - \sqrt{18}}{2}$$

Корни уравнения $t^3 - 21t - \sqrt{22} = 0$:

$$\begin{cases} t = \sqrt{22} \\ t = \frac{-\sqrt{22} + \sqrt{18}}{2} \\ t = \frac{-\sqrt{22} - \sqrt{18}}{2} \end{cases}$$

3) Тогда корни уравнения $x^9 - 21x^3 - \sqrt{22} = 0$:

$$x = \sqrt[3]{t}$$

~~$$x = \sqrt[3]{t}$$~~

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{22} \\ x = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{22} + \sqrt{18}}{2}} \\ x = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{22} - \sqrt{18}}{2}} \end{cases}$$

Ответ: $\sqrt[3]{22}$; $\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{22} + \sqrt{18}}{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{22} - \sqrt{18}}{2}}$

№5 Виртуально разобьём трубу на 4 одинаковые части по 50 см. Точки А и В (которые промаркируем) не могут находиться на первой и последней части, а также не могут находиться в одной, ~~части~~ (по нормативам). Т.е. А - на II части, В - на III. Однако и между ними должно быть ≥ 50 см.



Однако и между ними должно быть ≥ 50 см. (Вероятность этого - $\frac{1}{4}$, т.к. каждой такой позиции соответствует ещё 3 позиции не подходящие под это условие, а эти 3-ём - равно одна такая:)

Найдём вероятность того, что в такой позиции (по нормативам логики) между А и В ≥ 50 см:

Если А в начале II части, то вероятность того, что АВ ≥ 50 см - $\frac{1}{2}$ (т.к. В любом случае на III части). Однако если А в конце II части - вероятность 0 , т.к. где любой В на III части АВ < 50 см. Тогда вероятность того, что АВ ≥ 50 см (только для позиций, где А - на II и В на III) - среднее арифметическое между 1 и 0 , т.е. $\frac{1}{2}$. Тогда в итоге вероятность того, что три части трубы, помеченные из-за равных А и В:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Решение неверно