



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 89259 Класс 10

Вариант 41 Дата 19.02.2022



- 3) можно выбирать дороги, угол между которыми $= 120^\circ$.
Количество таких вариантов $= 6 \cdot 2 = 12$ (для каждой дороги есть две под углом $= 120^\circ$). Расстояние через нас составит:

$$\sqrt{5^2 + 5^2} + 2 \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ км, где } \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 60^\circ, 5 - \text{гипотенуза,}$$

а 2 - множитель, учитывающий, что таких треугольников 2.

- 4) можно выбирать противоположные дороги. Количество таких вариантов $=$ количеству дорог $= 6$. Расстояние через нас составит $5+5=10$ км.

Общее количество вариантов $= 6+12+6+12 = 36$. Случаи, где $S > 8$ км -

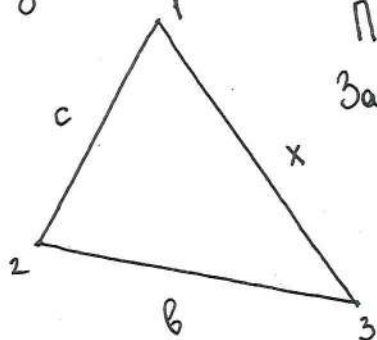
3) и 4) $\Rightarrow$ количество подходящих вариантов $= 6+12 = 18 \Rightarrow$

$$\text{вероятность таких случаев} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

* рассмотрим все случаи, поскольку возможны углы между дорогами лишь в $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ и 180° . В любом другом случае между дорогами будет угол $> 180^\circ \Rightarrow$ найдется смежный к нему, уже рассмотренный.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 5



Пусть $S_2 = c$, $S_{13} = x$ и $S_{23} = b$.

Запишем предположенное условие в виде системы; где a - параметр:

$$\begin{cases} 4x = b + c & (1) \\ c + a = x + b & (2) \\ c + x = 85 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c &= 4x - b \\ 4x - b + x &= 85 \\ 5x &= 85 + b \\ x &= \frac{85}{5} + \frac{b}{5} \end{aligned}$$

Замечание: $x = 17 + \frac{1}{5}b$



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 89259 Класс 10

Вариант 41 Дата 19.02.2022



$$c = 4x - b \text{ из (1)}$$

~~$$4x - b + x = 85 \text{ из (2)}$$~~

$$4x - b + x = 85 \text{ из (2)}$$

$$x = 17 + \frac{b}{5}$$

$$c = 68 - \frac{b}{5}$$

$$68 - \frac{b}{5} + a = 17 + \frac{b}{5} + b \text{ из (3)}$$

$$a = -51 + \frac{7b}{5}$$

206.

Поскольку statements 1, 2, 3 не лежат на одной прямой, то образует треугольник. По неравенству треугольника $c + x > b \Rightarrow b < 85$, откуда $a < -51 + \frac{7 \cdot 85}{5} = -51 + 7 \cdot 17 \quad a = 68$
 $a < 68$.

По неравенству треугольника $x + b > c$, получаем, что $a > 0 \Rightarrow a \in (0; 68)$

При $a = 5$ система принимает вид:

~~$$4x + b$$~~

$$\begin{cases} 4x = b + c & (1) \\ c + 5 = x + b & (2) \\ c + x = 85 & (3) \end{cases}$$

$$c = 85 - x \text{ из (3)}$$

~~$$85 - x = x + b \text{ из (2)}$$~~

~~$$b = 85 - 2x \text{ из (2)}$$~~

$$85 - x + 5 = x + b \text{ из (2)}$$

$$90 - 2x = b$$

$$4x = 90 - 2x + 85 - x \text{ из (1)}$$

$$7x = 175$$

$$x = 25 \text{ км}$$

$$b = 40 \text{ км}$$

$$c = 60 \text{ км}.$$

Ответ: $a \in (0; 68)$

при $a = 5$: $S_{12} = 60 \text{ км}$, $S_{13} = 25 \text{ км}$ и $S_{23} = 40 \text{ км}$.



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 89259 Класс 10

Вариант 41 Дата 19.02.2022



Задание 2:

Заметим, что при $b = 0$ условие выполняется, но предположим, что существует случай, где $b \neq 0$:

$$b\sqrt[4]{b}(x^2 - 10x + 25) + \frac{\sqrt[4]{b}}{x^2 - 10x + 25} \leq \frac{1}{5}\sqrt[4]{b^3} \cdot \left| \sin \frac{\pi x}{10} \right|$$

Разделим части на $\sqrt[4]{b^3} \cdot \frac{1}{5}$

$$5\sqrt[4]{b^3}(x-5)^2 + \frac{5}{(x-5)^2\sqrt[4]{b}} \leq \left| \sin \frac{\pi x}{10} \right|$$

Учтем, что $x-5 \neq 0$ и перепишем неравенство:

$$5\sqrt[4]{b^3}(x-5)^4\sqrt[4]{b} + 5 \leq \left| \sin \frac{\pi x}{10} \right|$$

$$5b(x-5)^4 + 5 \leq \left| \sin \frac{\pi x}{10} \right| \cdot \sqrt[4]{b}$$

т.к. ~~бывает~~ ~~значит~~ $\sin$ принимает значения от 0 до 1, то

$$\cancel{5b(x-5)^4 + 5 \leq [0; 1] \cdot (0; 1]}$$

$$\cancel{5b(x-5)^4 \leq [-5; -4]}$$

$$5b(x-5)^4 + 5 \leq (0; 1]$$

$$5b(x-5)^4 \leq (-5; -4]$$

$$b(x-5)^4 \leq (-1; -0,8]$$

$$b \leq \frac{(-1; -0,8]}{(x-5)^4}$$

Поскольку $(x-5)^4$ всегда > 0 , то $b \leq$ некоторого отрицательного числа, что как минимум меньше 0, но и также противоречит условию, что из b извлекается квадратный корень
 $\Rightarrow$ наибольшее значение $b = 0$

Ответ: 0.



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c = a(bc)$ $E=mc^2$ $\frac{1}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$

Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 89259 Класс 10

Вариант 41 Дата 19.02.2022

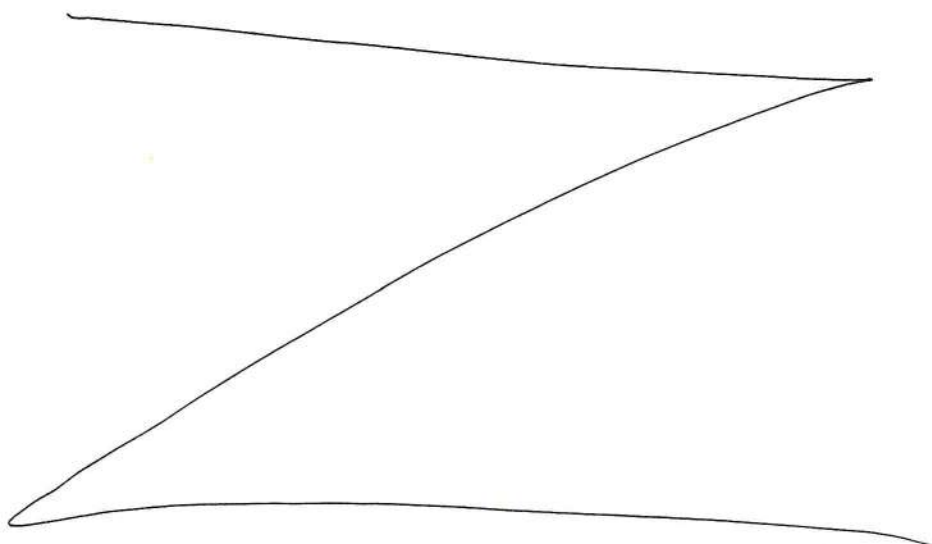


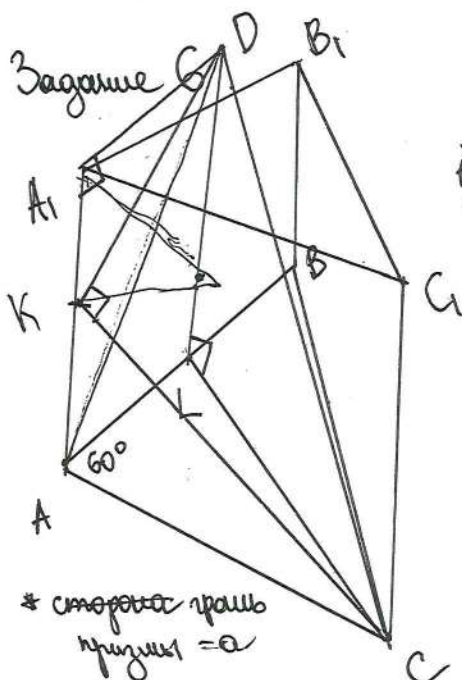
$$5\sqrt[4]{b^3} (x-5)^2 + \frac{5}{(x-5)^2 \sqrt[4]{b}} \leq \left| \sin \frac{\pi x}{10} \right|$$

левая часть при $b > 0$ всегда > 1 , а правая часть ~~ниже~~ ^{или равна},
откуда данное в условии неравенство не достигается

левая часть > 1 , поскольку при упрощении выражение
сводится к $5k + \frac{5}{k} = 5\left(k + \frac{1}{k}\right)$, а $k + \frac{1}{k}$ - сумма обратных
чисел, что > 1 .

Ответ: 0.





Решение:

1) Поскольку $\angle DKC$ и $\angle DLC$ опираются на DC — диаметр, то $\angle DKC = \angle DLC$.

2) Рассмотрим $\triangle DKC$ по теореме Пифагора: $KD^2 + KC^2 = CD^2$
 $3^2 + KC^2 = CD^2$

3) Рассмотрим $\triangle DLC$ по теореме Пифагора: $(\sqrt{6})^2 + LC^2 = CD^2$

4) $\Rightarrow 3^2 + KC^2 = (\sqrt{6})^2 + LC^2$
 $KC^2 + 3 = LC^2$

5) Рассмотрим $\triangle ALC$:

$\angle LAC = 60^\circ$, т.к. призма правильная; LC — медиана $\Rightarrow$ и

высота равнобедренного $\triangle ABC \Rightarrow \angle ALC = 90^\circ$.

Тогда $\frac{LC}{a} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow LC = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

6) Рассмотрим $\triangle KAC$:

$\angle KAC = 90^\circ$, т.к. призма правильная, против стороны $\frac{1}{2}$

гипотенузы лежит $\angle C$ в $30^\circ \Rightarrow \angle KCA = 30^\circ \Rightarrow \angle CKA = 60^\circ$.

Тогда $\frac{a}{KC} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow KC = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

105.

7) Имеем: $\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3$

А дальше?



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика,
Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 89259 Класс 10

Вариант 41 Дата 19.02.2022



Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	0	2	0	2	0	1	0	

Оценка цифрами

Оценка прописью

Подпись

5	6	пятьдесят	шесть	Шаборина
---	---	-----------	-------	----------



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 89259 Класс 10

Вариант 41 Дата 19.02.2022



Задание 1.

$$x^6 - 2022x^2 + \sqrt{2021} = 0$$

Пусть $t = x^2$:

$$t^3 - 2022t + \sqrt{2021} = 0$$

По теореме Безу находим $t_1 = \sqrt{2021}$.

Поделим многочлен $t^3 - 2022t + \sqrt{2021}$ на $(t - \sqrt{2021})$, получим:

$$t^2 + \sqrt{2021}t - 1 = 0$$

$$D = 2021 + 4 = 2025$$

$$\begin{cases} t_2 = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2} \\ t_3 = \frac{-\sqrt{2021} - 45}{2} \end{cases}$$

Обратная замена:

При $t_1 = \sqrt{2021}$, $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{2021}$.

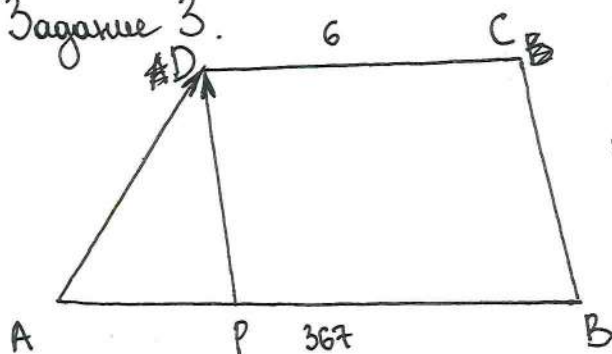
При $t_2 = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}$, $x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}}$

При $t_3 = \frac{-\sqrt{2021} - 45}{2}$, $x^2 < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

Ответ: $\pm \sqrt[4]{2021}$; $\pm \sqrt{\frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}}$.

50

Задание 3.



Решение:

- 1) Построим $\overrightarrow{DP} \parallel \overrightarrow{BC}$
- 2) т.к. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PD}$ задана
сводится к нахождению
 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PD}$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 89259 Класс 10

Вариант 41 Дата 19.02.2022



$$3) \vec{AD} \cdot \vec{PD} = AD^2 + PD^2 - 2AD \cdot PD \cdot \cos \angle ADP$$

$$4) \text{ рассмотрим } \triangle ADP: AP^2 = AD^2 + PD^2 - 2AD \cdot PD \cdot \cos \angle ADP \text{ по теореме косинусов}$$

$$5) \vec{AD} \cdot \vec{PD} = AP^2$$

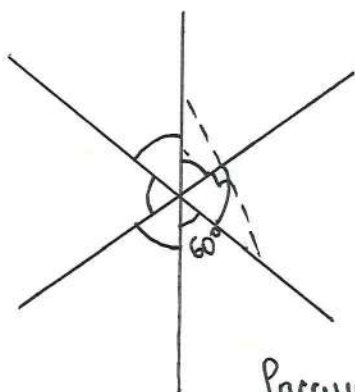
$$6) AP = AB - PB = AB - CD, \text{ поскольку в четырехугольнике } BCDP \\ CD \parallel BP \text{ как основания трапеции и } BC \parallel DP \\ \text{по условию } \Rightarrow BCDP - \text{параллелограмм}$$

$$7) \vec{AD} \cdot \vec{PD} = (AB - CD)^2 = (367 - 6)^2 = 361^2 \Rightarrow PB = CD. \\ = 130321$$

Ответ: 130321.

Задача 4.

Рассмотрим схему:



Поскольку здание стоит в центре круглого поля, то равные сектора между дорогами возможны, если углы между ними опираются на равные дуги $\Rightarrow$ каждый угол $= 360^\circ / 6 = 60^\circ$.

Рассмотрим все возможные случаи:

1) человек выбирает 1 и ту же дорогу. Количество таких вариантов $=$ количеству дорог $= 6$. Расстояние через парк составит 0 км.

2) человек выбирает дорогу, угол между которыми $= 60^\circ$. Количество таких вариантов $= 6 \cdot 2 = 12$ (для каждой дороги есть две под углы $= 60^\circ$). Расстояние через парк составит: $\sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5} = 5$ км по теореме косинусов.



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 89259 Класс 10

Вариант 41 Дата 19.02.2022



Задание 2:

Заметим, что при $b=0$ условие выполняется, но предположим, что существует случай, где $b \neq 0$:

$$b\sqrt[4]{b}(x^2-10x+25) + \frac{\sqrt[4]{b}}{x^2-10x+25} \leq \frac{1}{5}\sqrt[4]{b^3} \cdot \left| \sin \frac{\pi x}{10} \right|$$

Разделим части на $\sqrt[4]{b^3} \cdot \frac{1}{5}$

$$5\sqrt[4]{b^3}(x-5)^2 + \frac{5}{(x-5)^2\sqrt[4]{b}} \leq \left| \sin \frac{\pi x}{10} \right|$$

Учтем, что $x-5 \neq 0$ и перепишем неравенство:

$$5\sqrt[4]{b^3}(x-5)^4\sqrt[4]{b} + 5 \leq \left| \sin \frac{\pi x}{10} \right|$$

$$5b(x-5)^4 + 5 \leq \left| \sin \frac{\pi x}{10} \right| \cdot \sqrt[4]{b}$$

т.к. ~~sin~~ $\sin$ принимает значения от 0 до 1, то

$$\cancel{5b(x-5)^4 + 5 \leq [0; 1] \cdot \sqrt[4]{b}}$$

$$\cancel{5b(x-5)^4 \leq [-5; -4] \cdot \sqrt[4]{b}}$$

$$5b(x-5)^4 + 5 \leq [0; 1]$$

$$5b(x-5)^4 \leq [-5; -4]$$

$$b(x-5)^4 \leq [-1; -0,8]$$

$$b \leq \frac{[-1; -0,8]}{(x-5)^4}$$

Поскольку $(x-5)^4$ всегда > 0 , то $b \leq$ некоторого отрицательного числа, что как минимум меньше 0, но и также противоречит условию, что из b извлекается квадратный корень
 $\Rightarrow$ наибольшее значение $b = 0$

Ответ: 0.



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 89259 Класс 10

Вариант 41 Дата 19.02.2022



- 3) можно выбирать дороги, угол между которыми $= 120^\circ$.
Количество таких вариантов $= 6 \cdot 2 = 12$ (для каждой дороги есть две под углом $= 120^\circ$). Расстояние через нас составит:

$$\sqrt{5^2 + 5^2} + 2 \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ км, где } \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 60^\circ, 5 - \text{гипотенуза,}$$

а 2 - множитель, учитывающий, что таких треугольников 2.

- 4) можно выбирать противоположные дороги. Количество таких вариантов $=$ количеству дорог $= 6$. Расстояние через нас составит $5 + 5 = 10 \text{ км}$.

Общее количество вариантов $= 6 + 12 + 6 + 12 = 36$. Случаи, где $S > 8 \text{ км}$ -

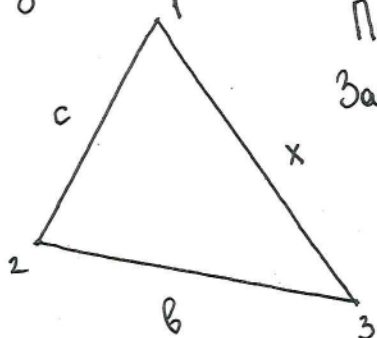
3) и 4) $\Rightarrow$ количество подходящих вариантов $= 6 + 12 = 18 \Rightarrow$

$$\text{вероятность таких случаев} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

* рассмотрим все случаи, поскольку возможны углы между дорогами лишь в $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ и 180° . В любом другом случае между дорогами будет угол $> 180^\circ \Rightarrow$ найдется смежный к нему, уже рассмотренный.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задание 5



Пусть $S_2 = c$, $S_{13} = x$ и $S_{23} = b$.

Запишем предположенное условие в виде системы; где a - параметр:

$$\begin{cases} 4x = b + c & (1) \\ c + a = x + b & (2) \\ c + x = 85 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c &= 4x - b \\ 4x - b + x &= 85 \\ 5x &= 85 + b \\ x &= \frac{17}{5} + \frac{b}{5} \end{aligned}$$

Замечание



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика,
Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 89259 Класс 10

Вариант 41 Дата 19.02.2022



Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	0	2	0	2	0	1	0	

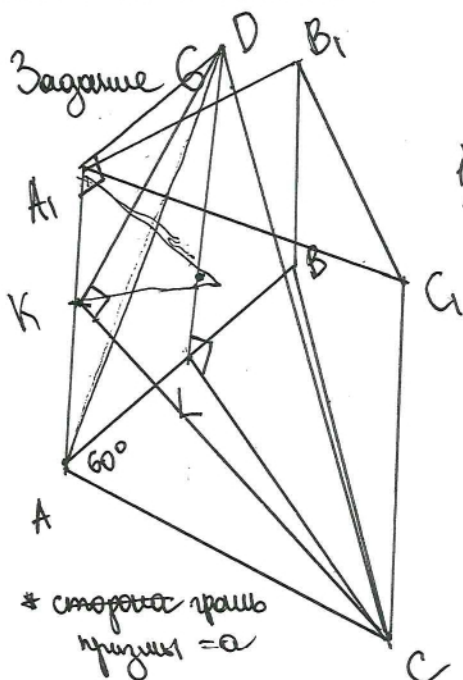
Оценка цифрами

Оценка прописью

Подпись

5	6	пятьдесят	шесть	Шаборина
---	---	-----------	-------	----------





Решение:

1) Поскольку $\angle DKC$ и $\angle DLC$ опираются на DC — диаметр, то $\angle DKC = \angle DLC$.

2) Рассмотрим $\triangle DKC$ по теореме Пифагора: $KD^2 + KC^2 = CD^2$
 $3^2 + KC^2 = CD^2$

3) Рассмотрим $\triangle DLC$ по теореме Пифагора: $(\sqrt{6})^2 + LC^2 = CD^2$

4) $\Rightarrow 3^2 + KC^2 = (\sqrt{6})^2 + LC^2$
 $KC^2 + 3 = LC^2$

5) Рассмотрим $\triangle ALC$:

$\angle LAC = 60^\circ$, т.к. призма правильная; LC — медиана $\Rightarrow$ и высота равнобедренного $\triangle ABC \Rightarrow \angle ALC = 90^\circ$.
Тогда $\frac{LC}{a} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow LC = \frac{a}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

6) Рассмотрим $\triangle KAC$:

$\angle KAC = 90^\circ$, т.к. призма правильная, против стороны $= \frac{1}{2}$ гипотенузы лежит $\angle$ в $30^\circ \Rightarrow \angle KCA = 30^\circ \Rightarrow \angle CKA = 60^\circ$.

Тогда $\frac{a}{KC} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow KC = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

105.

7) Имеем: $\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3$

А дальше?



Площадка написания

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет (Физика, Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 89259 Класс 10

Вариант 41 Дата 19.02.2022



$$c = 4x - b \text{ из (1)}$$

~~$$4x - b + x = 85 \text{ из (2)}$$~~

$$4x - b + x = 85 \text{ из (2)}$$

$$x = 17 + \frac{b}{5}$$

$$c = 68 - \frac{b}{5}$$

$$68 - \frac{b}{5} + a = 17 + \frac{b}{5} + b \text{ из (3)}$$

$$a = -51 + \frac{7b}{5}$$

206.

Поскольку statements 1, 2, 3 не лежат на одной прямой, то образуют треугольник. По неравенству треугольника $c + x > b \Rightarrow b < 85$, откуда $a < -51 + \frac{7 \cdot 85}{5} = -51 + 7 \cdot 17 \quad a < 68$.

По неравенству треугольника $x + b > c$, получаем, что $a > 0 \Rightarrow a \in (0; 68)$

При $a = 5$ система принимает вид:

~~$$4x + b$$~~

$$\begin{cases} 4x = b + c & (1) \\ c + 5 = x + b & (2) \\ c + x = 85 & (3) \end{cases}$$

$$c = 85 - x \text{ из (3)}$$

~~$$85 - x = x + b \text{ из (2)}$$~~

~~$$b = 85 - 2x \text{ из (2)}$$~~

$$85 - x + 5 = x + b \text{ из (2)}$$

$$90 - 2x = b$$

$$4x = 90 - 2x + 85 - x \text{ из (1)}$$

$$7x = 175$$

$$x = 25 \text{ км}$$

$$b = 40 \text{ км}$$

$$c = 60 \text{ км}.$$

Ответ: $a \in (0; 68)$

при $a = 5$: $S_{12} = 60 \text{ км}$, $S_{13} = 25 \text{ км}$ и $S_{23} = 40 \text{ км}$.



Задание 1.

$$x^6 - 2022x^2 + \sqrt{2021} = 0$$

Пусть $t = x^2$:

$$t^3 - 2022t + \sqrt{2021} = 0$$

По теореме Безу находим $t_1 = \sqrt{2021}$.

Поделим многочлен $t^3 - 2022t + \sqrt{2021}$ на $(t - \sqrt{2021})$, получим:

$$t^2 + \sqrt{2021}t - 1 = 0$$

$$D = 2021 + 4 = 2025$$

$$\begin{cases} t_2 = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2} \\ t_3 = \frac{-\sqrt{2021} - 45}{2} \end{cases}$$

Обратная замена:

При $t_1 = \sqrt{2021}$, $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{2021}$.

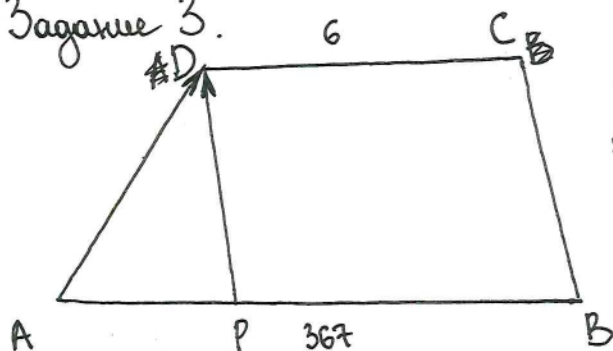
При $t_2 = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}$, $x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}}$

При $t_3 = \frac{-\sqrt{2021} - 45}{2}$, $x^2 < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

Ответ: $\pm \sqrt[4]{2021}$; $\pm \sqrt{\frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}}$.

55

Задание 3.



Решение:

- 1) Построим $\overrightarrow{DP} \parallel \overrightarrow{BC}$
- 2) т.к. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PD}$ задана
сводится к нахождению
 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PD}$