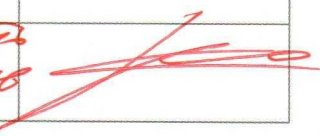


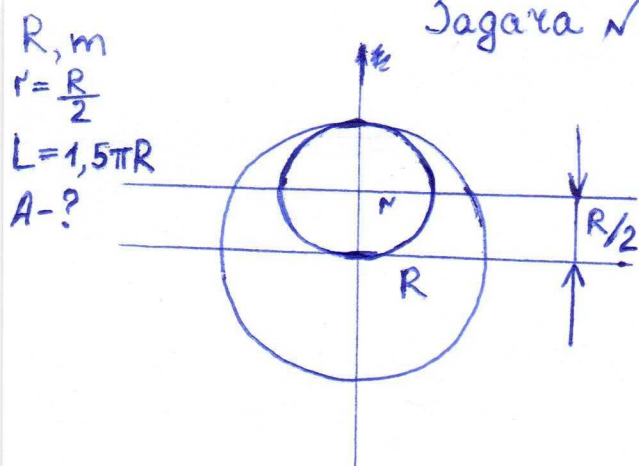
ШИФР 32054

Класс 11 Вариант 2 Дата Олимпиады 03.03.18

Площадка написания МГТУ им. Н.Э.Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ <u>28</u>		Подпись
							Цифрой	Прописью	
Оценка	<u>5</u>	<u>5</u>	<u>5</u>	<u>5</u>	<u>5</u>	<u>3</u>	<u>28</u>	<u>двадцать восемь</u>	

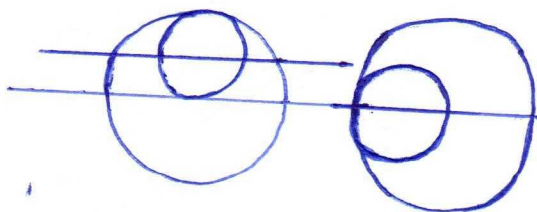
Задача №1



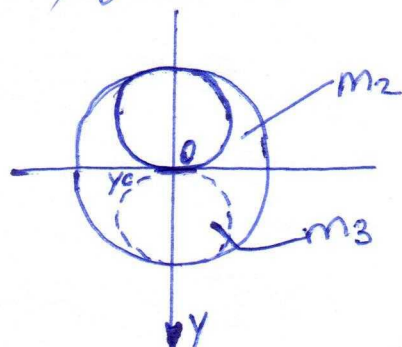
Решение:

Масса цилиндра с отверстием равна $m_1 = \frac{3}{4}m$ (Массы пропорциональны соответствующим площадям сечения цилиндра)

Для перекачивания цилиндра на расстояние $L = \frac{3}{2}\pi R$ необходимо совершить минимальную работу $A = \frac{3}{4}mg \cdot \Delta y_c$, где Δy_c — перемещение центра масс цилиндра вдоль вертикальной оси y



Представим цилиндр с отверстием как сумму двух симметричных тел с массами $m_2 = \frac{m}{2}$ и $m_3 = \frac{m}{4}$ и, взяв начало координат в центре цилиндра в точке O



получим $y_c = \frac{m_3 \cdot \frac{R}{2}}{m_2 + m_3}$, т.е.

$$y_c = \frac{\frac{m}{4} \cdot \frac{R}{2}}{\frac{3}{4}m} = \frac{R}{6}$$

Следовательно, $y_c = 2y_c = \frac{R}{3}$ и работа равна $A = \frac{3}{4}mg \cdot \frac{R}{3} = \frac{mgR}{4}$

Ответ: $A = \frac{mgR}{4}$



$$(ab)c = a(bc)$$

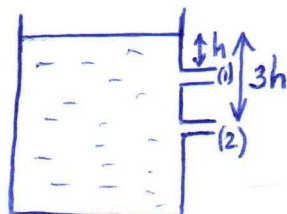
$$E = mc^2$$



Задача №2

$h, 3h$

$l - ?$



Решение:

Запишем ур-ие Бернулли для отверстий (1) и (2):

$$(1) \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g h$$

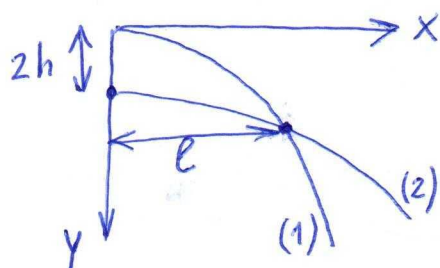
$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

$$(2) \frac{\rho v_2^2}{2} = 3\rho g h$$

$$v_2 = \sqrt{6gh}$$

Рассмотрим движение струй воды, вытекающих из отверстий: (расстояние между отверстиями = $2h$)

Введем сис-му координат xOy :



Запишем ур-ия, описывающие движение струй (1) и (2):

$$(1) \begin{cases} v_x = v_1 \\ v_y = gt \\ x_1 = v_1 t \\ y_1 = \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} v_x = v_2 \\ v_y = gt \\ x_2 = v_2 t \\ y_2 = 2h + \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

$$(1) : t = \frac{x_1}{v_1}$$

$$y_1(x_1) = \frac{gx_1^2}{2v_1^2}$$

$$(2) t = \frac{x_2}{v_2}$$

$$y_2(x_2) = 2h + \frac{gx_2^2}{2v_2^2}$$

В точке пересечения струй выполняются равенства:

$$x_1 = x_2 = l ; y_1(x_1) = y_2(x_2)$$

$$\frac{gl^2}{2v_1^2} = 2h + \frac{gl^2}{2v_2^2}$$

+

Подставим v_1 и v_2 и найдем l : $\frac{gl^2}{4gh} = 2h + \frac{gl^2}{12gh}$

$$\frac{2gl^2}{12gh} = 2h \Rightarrow \frac{l^2}{6h} = 2h ; l^2 = 12h^2 ; l = 2h\sqrt{3}$$

Ответ: $l = 2h\sqrt{3}$

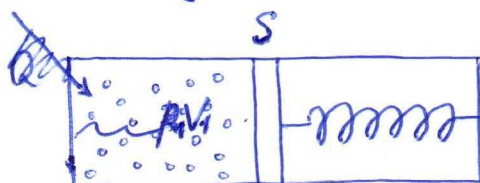
$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Задание №3

$$\begin{aligned} V &= 4 \text{ л} \\ P &= 10^6 \text{ Па} \\ n &= 3 \\ A &= ? \end{aligned}$$



← До расширения
(условие равновесия)

$$\begin{cases} P_1 S = K x_H \\ x_H = \frac{V_1}{S} \end{cases}$$

после:

$$P_1 \rightarrow P_2$$

$$V_1 \rightarrow V_2$$

$$\boxed{\frac{K}{S^2} = \frac{P_1}{V_1} = \text{const}}$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{P_1 V}{V_1} dV = \frac{P_1 V^2}{2 V_1} \Big|_{V_1}^{V_2} \Rightarrow \frac{P_1}{V_1} = \frac{P}{V} \Rightarrow P = \frac{P_1}{V_1} V$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 V_1}{2} \left[\underbrace{\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2}_{\frac{3}{9}} - 1 \right] = \underbrace{4 P_1 V_1}_{\frac{10^6 \cdot 4}{9}} = 16000 \text{ Дж} = 16 \text{ кДж}$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

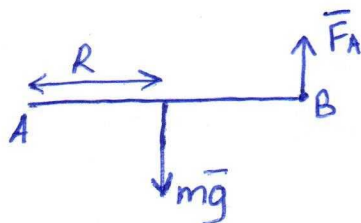


Задание №4

R, B, I, ℓ

Решение:

$m - ?$



На кольцо действует 2 силы: Сила Ампера (F_A) и сила тяжести (mg)

Рассмотрим равенство моментов относительно точки A в момент, когда кольцо начинает подниматься:

$M_1 = mgR$, т.к. R - плечо силы тяжести
момент силы тяжести

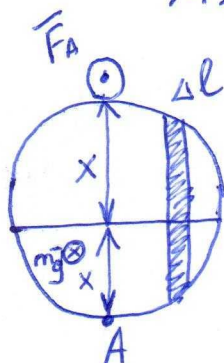
Найдем момент M_2 силы Ампера:

Рассмотрим небольшой участок кольца $\Delta \ell$, тогда:

$$\Delta M_2 = IB \Delta \ell \cdot 2x$$

$$M_2 = \sum \Delta M_2 = IB S_{\text{кольца}} = IB \pi R^2$$

'магнитный
момент



$M_2 = M_1$ в момент, когда кольцо начинает подниматься $\Rightarrow mgR = IB \pi R^2$

$$mg = IB \pi R$$

$$m = \frac{IB \pi R}{g}$$

Ответ: $m = \frac{IB \pi R}{g}$

$$(ab)c = a(bc)$$

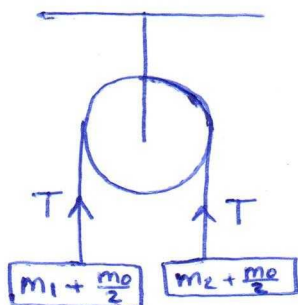
$$E = mc^2$$



ШИФР 32054

Задание №5

m_0, m_1, m_2
 $a_{ц.м.} - ?$



Задача сводится к нахождению центра масс сис-мы, когда нить расположена симметрично.
Нужно добавить к каждому грузу массу, равную $\frac{m_0}{2}$.

Запишем 2 з. Ньютона для грузов:

$$\begin{cases} (1) & (m_2 + \frac{m_0}{2})a = -(m_2 + \frac{m_0}{2})g + T \\ (2) & (m_1 + \frac{m_0}{2})a = (m_1 + \frac{m_0}{2})g - T \end{cases}$$

(1) + (2) :

$$(m_2 + m_1 + m_0)a = (m_1 + \frac{m_0}{2})g - (m_2 + \frac{m_0}{2})g$$

$$(m_2 + m_1 + m_0)a = (m_1 - m_2)g$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_2 + m_1 + m_0}$$

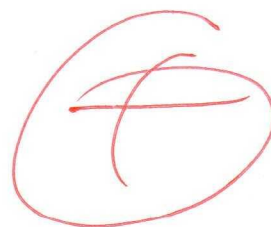
$$a_{ц.м.} = \frac{m^* \vec{a} + m'' \vec{a}}{m^* + m''}, \text{ где } m^* = m_1 + \frac{m_0}{2}$$

$$m'' = m_2 + \frac{m_0}{2}$$

$$a_{ц.м.} = \frac{m^* a - m'' a}{m^* + m''} = \frac{(m_1 + \frac{m_0}{2})a - (m_2 + \frac{m_0}{2})a}{m_1 + m_2 + m_0} =$$

$$= \frac{(m_1 - m_2)a}{m_1 + m_2 + m_0} = \frac{(m_1 - m_2)^2 g}{(m_1 + m_2 + m_0)^2}$$

Ответ: $a_{ц.м.} = \frac{(m_1 - m_2)^2 g}{(m_1 + m_2 + m_0)^2}$

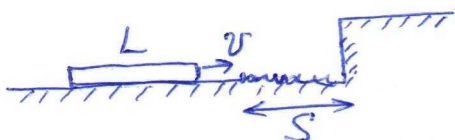




L, m, S, τ

$v = ?$

Задача №6



Решение:

Запишем 2-й закон Ньютона для бруска, который заехал на x на шероховатую поверхность:

$$ma = \frac{mgx}{L}, \text{ где } m - \text{масса бруска}$$

$$a = \frac{gdx}{L}, \text{ т.е. } a - \text{линейная функция от } x$$

x - расстояние, на которое заехал брусок на шероховатую поверхность

$$da = \frac{gdx}{L}; \text{ } x \text{ изменяется в пределах от } 0 \text{ до } S$$

Интегрируем обе части:

$$\int_0^S da = \int_0^S \frac{mgdx}{L} \Rightarrow a = \frac{mg}{L} \int_0^S dx = \frac{mg}{L} x \Big|_0^S =$$

$$\frac{mgS}{L} - \frac{mg \cdot 0}{L} = \frac{mgS}{L}$$

$$v_x \tau = S$$

$v_x = v - a\tau$, где v - скорость бруска по гладкому участку.

$$(v - a\tau)\tau = S$$

$$v\tau - a\tau^2 = S$$

$$v\tau = S + a\tau^2$$

$$v = \frac{S + a\tau^2}{\tau} = \frac{S + \frac{mgS\tau^2}{L}}{\tau} = \frac{0,5 \text{ м} + (0,5 \cdot 0,5476) \text{ м}}{0,74 \text{ с}} =$$

$$= \frac{0,7738 \text{ м}}{0,74 \text{ с}} \approx 1,05 \text{ м/с}$$

Ответ: $v = 1,05 \text{ м/с}$

$v \sim a\tau^2$ const