


$$(ab)c = a(bc)$$

$$(ab)c = a(bc)$$
$$(ab)c = a(bc)$$
$$(ab)c = a(bc)$$
$$(ab)c = a(bc)$$
$$(ab)c = a(bc)$$

$E=mc^2$

ШИФР 12354

Класс 11 Вариант 6 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	50	50	50	50	100	100	80	80	150	180	890	восемьдесят девять тысяч	<i>[Signature]</i>

№1

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 2) = 5$$

Пусть $t = x^2 + 2x + 2$, тогда $t(t - 4) = 5$

$$t^2 - 4t = 5$$

$$(t - 5)(t + 1) = 0$$

$$\begin{cases} t = 5 \\ t = -1 \end{cases}$$

Значит, $\begin{cases} x^2 + 2x + 2 = -1 \\ x^2 + 2x + 2 = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 3 = 0 - \text{не имеет решений, т.к. } (x^2 + 2x + 3) = \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} = (x+1)^2 + 2 > 0 \quad ((x+1)^2 \geq 0, 2 > 0)$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ответ: $-3; 1$.

+50

№2

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$$

$$(\sqrt{2x+1})^2 = (2\sqrt{x} - \sqrt{x-3})^2$$

$$2x+1 = 4x - 4\sqrt{x(x-3)} + x-3$$

$$4\sqrt{x(x-3)} = 3x-4$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3.$$

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12354

$$\begin{cases} 16(x-3) = (3x-4)^2 \\ 3x-4 > 0 \text{ (соед. ОДЗ)} \end{cases}$$

$$16x^2 - 48x = 9x^2 - 24x + 16$$

$$7x^2 - 24x - 16 = 0$$

$$D_1 = 12^2 + 7 \cdot 16 = 16^2$$

$$x_1 = \frac{12-16}{7} = -\frac{4}{7}, \quad -\frac{4}{7} < 3 \text{ - не подх. по ОДЗ}$$

$$x_2 = \frac{12+16}{7} = 4, \quad 4 > 3 \text{ - подх. по ОДЗ.}$$

Ответ: 4.

+50

№3

$$\frac{x^2-2}{x^2-1} < -2$$

$$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1} < 0$$

$$\frac{3x^2-4}{x^2-1} < 0$$

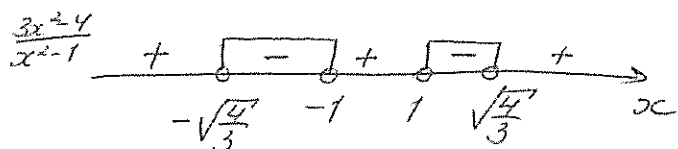
$$3x^2-4=0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$x^2-1=0$$

$$x = \pm 1$$

$$|\sqrt{\frac{4}{3}}| > 1$$



$$x \in (-\sqrt{\frac{4}{3}}; -1) \cup (1; \sqrt{\frac{4}{3}}).$$

+ 50

Ответ: $(-\sqrt{\frac{4}{3}}; -1) \cup (1; \sqrt{\frac{4}{3}})$.

№4

$$\log_4(2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4\left(\frac{16}{3}\right)$$

$$\log_4(2x+3)(x-1) = \log_4\left(\frac{16}{3}\right)$$

$$4 \log_4(2x+3)(x-1) = 4 \log_4(3)$$

$$\begin{aligned} \text{ОДЗ:} \\ \begin{cases} 2x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \\ x > 1 \end{aligned}$$

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12354

$$(2x+3)(x-1)=3$$

$$2x^2+x-3=3$$

$$2x^2+x-6=0$$

$$D=1+48=7^2$$

$$x_1 = \frac{-1-7}{4} = -2, \quad -2 \leq 1 - \text{не подх. по ОДЗ}$$

$$x_2 = \frac{-1+7}{4} = 1,5, \quad 1,5 > 1 - \text{подх. по ОДЗ} \quad + 58$$

Ответ: 1,5.

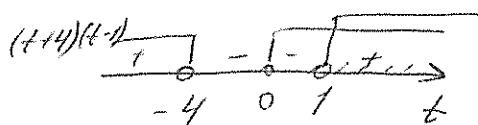
№5

$$4^x > 4 - 3 \cdot 2^x$$

Пусть $t = 2^x$, $t > 0$, тогда $t^2 > 4 - 3t$

$$t^2 + 3t - 4 > 0$$

$$(t+4)(t-1) > 0$$



$$\begin{aligned} t+4 &= 0 & t-1 &= 0 \\ t &= -4 & t &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t+4 &= 0 & t-1 &= 0 \\ t &= -4 & t &= 1 \end{aligned}$$

$$t > 1$$

Значит, $2^x > 1$

$$x > 0.$$

Ответ: $(0; +\infty)$.

№6

Пусть x человек фактически далжек был признать
всего по плану

	A	B	C	Всего
по плану	$\frac{4}{13}x$	$\frac{3}{13}x$	$\frac{6}{13}x$	x
в действительности	$\frac{4}{13}x + 4$	$\frac{3}{13}x + 5$	$\frac{6}{13}x + 6$	$x + 15$

ШИФР 12354

Тогда нам придется быть первыми на $\frac{x+15-x}{x}$,
что составляет $\frac{9}{13}$ т. е. $\frac{7}{100} + \frac{9}{1300} = \frac{1}{13}$

Решим уравнение:

$$\frac{15}{x} = \frac{1}{13}$$

$$x = 195$$

Тогда на специальность А было принято
 $\frac{4}{13} \cdot 195 + 4 = 64$ (человека);

на специальность В было принято $\frac{3}{13} \cdot 195 + 5 = 50$ (чел.);

на специальность С было принято $\frac{6}{13} \cdot 195 + 6 = 96$ (чел.).

Ответ: 64 чел.; 50 чел.; 96 чел. + 10 б.

№ 7

$$b_5 + b_9 = 6$$

$$b_1(q^4 + q^8) = 6$$

Поскольку $b_1 = 1$, то $q^4 + q^8 = 6$.

Пусть $t = q^4$, тогда

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t-2)(t+3) = 0$$

$$\begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$$

Значит, $\begin{cases} q^4 = -3 - \text{невозможно.} \\ q^4 = 2 \end{cases}$

$$q = \pm \sqrt[4]{2}$$

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12354

$$S_{13} = \frac{b_1(q^{13}-1)}{q-1} = q^{12} + q^{11} + q^{10} + q^9 + \dots + q + 1.$$

1) если $q = \sqrt[4]{2}$

$$S_n = b \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\begin{aligned} S_{13} &= (\sqrt[4]{2})^{12} + (\sqrt[4]{2})^{11} + (\sqrt[4]{2})^{10} + (\sqrt[4]{2})^9 + \dots + \sqrt[4]{2} + 1 = \\ &= 8 + 4\sqrt[4]{8} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt[4]{2} + 4 + 2\sqrt[4]{8} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2} + 2 + \\ &+ \sqrt[4]{8} + \sqrt{2} + \sqrt[4]{2} + 1 = 15 + (4+2+1)\sqrt[4]{8} + (4+2+1)\sqrt{2} + \\ &+ (4+2+1)\sqrt[4]{2} = 15 + 7(\sqrt[4]{8} + \sqrt{2} + \sqrt[4]{2}). \end{aligned}$$

2) если $q = -\sqrt[4]{2}$

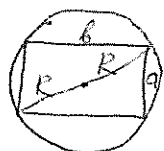
$$\begin{aligned} S_{13} &= (-\sqrt[4]{2})^{12} + (-\sqrt[4]{2})^{11} + (-\sqrt[4]{2})^{10} + (-\sqrt[4]{2})^9 + \dots - \sqrt[4]{2} + 1 = \\ &= 8 - 4\sqrt[4]{8} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt[4]{2} + 4 - 2\sqrt[4]{8} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt[4]{2} + 2 - \sqrt[4]{8} + \\ &+ \sqrt{2} - \sqrt[4]{2} + 1 = 15 - (4+2+1)\sqrt[4]{8} + (4+2+1)\sqrt{2} - (4+2+1)\sqrt[4]{2} = \\ &= 15 - 7(\sqrt[4]{8} - \sqrt{2} + \sqrt[4]{2}). \end{aligned}$$

Ответ: $15 + 7(\sqrt[4]{8} + \sqrt{2} + \sqrt[4]{2})$ или $15 - 7(\sqrt[4]{8} - \sqrt{2} + \sqrt[4]{2})$.

+ 80

$\sqrt{8}$

Решение:



a - ширина прямоуго.
 b - длина прямоуго.
по т. П $a^2 + b^2 = 4R^2$

$$\begin{cases} 2ab = \pi R^2 \\ a^2 + b^2 = 4R^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 = (\pi+4)R^2 \\ 2ab = \pi R^2 \end{cases}$$

Дано:

$$R = 10 \text{ см}$$

$$S_{\text{кр}} = 2S_{\text{пр}}$$

$$a = ?$$

$$b = ?$$

Поскольку a, b, R - положительные величины, то

$$\begin{cases} a+b = \sqrt{\pi+4} \cdot R \\ 2ab = \pi R^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \sqrt{\pi+4} \cdot R - a \\ 2a(\sqrt{\pi+4} \cdot R - a) = \pi R^2 \end{cases}$$

$$2a\sqrt{\pi+4} \cdot R - 2a^2 - \pi R^2 = 0$$

$$2a^2 - 2a\sqrt{\pi+4} \cdot R + \pi R^2 = 0.$$

$$D_1 = (\pi+4)R^2 - 2\pi R^2 = (4-\pi)R^2$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\sqrt{\pi+4} \cdot R + \sqrt{4-\pi} \cdot R}{2} \\ b_1 = \frac{\sqrt{\pi+4} \cdot R - \sqrt{4-\pi} \cdot R}{2} \\ a_2 = \frac{\sqrt{\pi+4} \cdot R - \sqrt{4-\pi} \cdot R}{2} \\ b_2 = \frac{\sqrt{\pi+4} \cdot R + \sqrt{4-\pi} \cdot R}{2} \end{cases}$$

Поскольку $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ симметричны
(т.е. $a_1 = b_2, a_2 = b_1$), то можно рассмотреть
только первую пару ~~рез~~ a, b .

$$a = \frac{R}{2} (\sqrt{\pi+4} - \sqrt{4-\pi}) \approx 5 (\sqrt{7,14} - \sqrt{0,86}) =$$

$$= 5 (\sqrt{7,14} - \sqrt{0,86}) \approx 5 (\sqrt{7,14} - \sqrt{0,86}) \approx \pm 8,5$$

$$\approx 5 (2,6 - 0,9) = 8,5 \text{ (см)}$$

$$b = \frac{R}{2} (\sqrt{\pi+4} + \sqrt{4-\pi}) = 5 (\sqrt{7,14} + \sqrt{0,86}) \approx$$

$$\approx 5 (2,6 + 0,9) = 17,5 \text{ (см)}$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$

$$V=\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{c^2}$$

ШИФР 12354

Ответ: $5(\sqrt{\pi+4} - \sqrt{4-\pi})_{\text{см}} \approx 8,5 \text{ см};$
 $5(\sqrt{\pi+4} + \sqrt{4-\pi})_{\text{см}} \approx 17,5 \text{ см}$

$$\sqrt{9}$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} & -I \\ \sin x \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} & -II \end{cases}$$

Пограничим $-\sqrt{3} = 4 \sin x \cos y$ в I и II ур-е:

$$2 \sin x + 2 \cos y = 1 + 4 \sin x \cos y = 0$$

$$2 \sin x - 1(1 - 2 \cos y) - (1 - 2 \cos y) = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(1 - 2 \cos y) = 0$$

$$\begin{cases} (2 \sin x - 1)(1 - 2 \cos y) = 0 \\ \sin x \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos y = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИОР 12354

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \pm \frac{5}{6} \pi + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \pm \frac{5}{6} \pi + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k_1 \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k_1 \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n_1 \end{cases}$$

$$k, n, k_1, n_1 \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \pm \frac{5}{6} \pi + 2\pi n);$

$(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n);$

$(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k_1; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n_1);$

$(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k_1; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n_1),$ где $k, n, k_1, n_1 \in \mathbb{Z}.$

+ 150

№10

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Т.к. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Пусть $\begin{cases} a^3 + 3ab^2 = 20 \\ 3a^2b + b^3 = 14\sqrt{2} \end{cases} ?$

Допустим, $b = \sqrt{2}$, тогда $\begin{cases} a^3 + 6a = 20 \\ 3a^2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} a^3 + 6a = 20 \\ 3a^2 = 12 \end{cases}$$

$a = 2, 3a^2 \cdot 2^2 = 12$ (верно),

$2^3 + 6 \cdot 2 = 20$ (верно).

Значит $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} =$
 $= 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4.$

180

ИЗПРОМ

ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$$

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12354

Ответ: 4.