ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18954

Класс 11   Вариант 11   Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	0	8	8	12	12	10	0	4	62	шестьдесят два	[illegible]

1)

$$A = \frac{2^{-2} + 2018^0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4{,}75 =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} + 1}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} + 4{,}75 = \frac{\frac{5}{4}}{5} + 4{,}75 = 5$$

$$0{,}6A = 0{,}6 \cdot 5 = 3.$$

$\boxed{\text{Ответ: } 3.}$

2) Н – „Новатэк"; Р – „Роснефть"; Л – „Лукойл"; Г – „Газпром"

Пусть ~~все компании вместе~~ Н+Р+Л за первое полугодие 2017 г добыли X млрд куб. м. газа.

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

Тогда Н добыл: Роснефть:

$$X : \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{X}{4} \qquad X : \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}X$$

Лукойл:

$$X : \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{X}{8}$$

По условию объем добычи газа Г составляет 30% от Р, поэтому Г добыл:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{8} X = \frac{3}{16} X$$

По условию задачи:

$$P = 8 + H + Л + Г$$

столько добыли вместе $H + P + Л$

То есть: $\frac{5}{8} X = 8 + \frac{X}{4} + \frac{X}{8} + \frac{3}{16} X \Rightarrow X = 128$

Получаем, что „Новатэк" добыл:

$\frac{X}{4} = 32$ млрд. куб. м газа;

Р — $\frac{5}{8} X = 80$ млрд. куб. м.

Л — $\frac{X}{8} = 16$ млрд. куб. м

Г — $\frac{3}{16} X = 24$ млрд. куб. м

Ответ: 32; 80; 16; 24 млрд. куб. м.

(4) $\sqrt{x^3-3x+1}-x=-1$

$\sqrt{x^3-3x+1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x^3-3x+1=x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^3-x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x(x^2-x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(5) $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{2}{3}$

1) $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1^2=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{\sin^2 2\alpha}{2}$ (*)

2) $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3=1^3=\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cdot\overbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}^{1}+\cos^6\alpha$

$1=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$1=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$ (**)

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

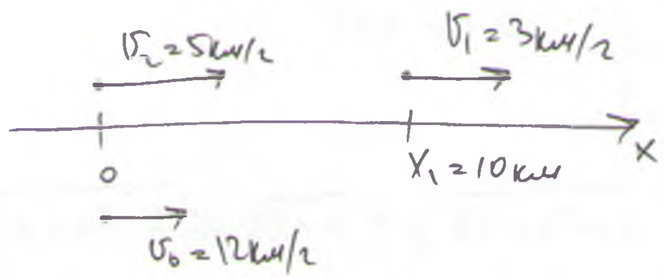
ШИФР 18954

Подставляя (*) и (**) в данное нам тождество, получаем:

$$\frac{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha-1}{1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha-1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

ч.т.д.

6)



Второй путешественник догоняет первого с относительной скоростью $v_{отн}=2$ км/ч. Поэтому они встретятся через $t=\frac{x_1}{v_{отн}}=\frac{10}{2}=5$ ч. Оса в течение этих 5 часов летит без остановки от одного к другому, соответственно она пролетит расстояние, равное:

$$S=v_0t=12\cdot 5=60\text{ км}$$

$\boxed{\text{Ответ: 60 км}}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

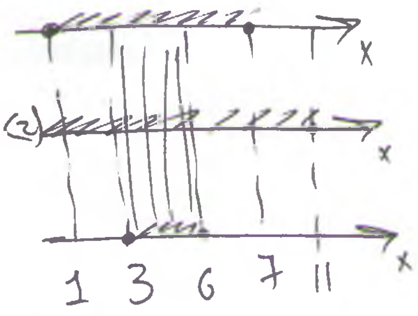
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18354

(7) $\sqrt{8x-x^2-7}-\sqrt{11-x}\geq\sqrt{9x-x^2-18}$

ОДЗ:

$$\begin{cases}8x-x^2-7\geq 0\\ 11-x\geq 0\\ 9x-x^2-18\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-8x+7\leq 0\\ x\leq 11\\ x^2-9x+18\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$



$\Rightarrow$ ОДЗ: $x\in[3;6]$

$$\sqrt{8x-x^2-7}\geq\sqrt{11-x}+\sqrt{9x-x^2-18}$$

Т.к. обе части нер-ва неотрицательны, то мы имеем право возвести в квадрат все неравенство (от этого знак не поменяется):

$$8x-\cancel{x^2}-7\geq 11-x+2\sqrt{11-x}\cdot\sqrt{9x-x^2-18}+9x-\cancel{x^2}-18$$

$$2\sqrt{11-x}\cdot\sqrt{9x-x^2-18}\leq 0$$

$$0\leq\sqrt{11-x}\cdot\overbrace{\sqrt{9x-x^2-18}}^{\geq 0}\leq 0$$

Заметим, что такое возможно только если:

$$\sqrt{11-x}\cdot\sqrt{9x-x^2-18}=0$$

$$\left[\begin{aligned}&11-x=0\\&9x-x^2-18=0\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=11\\&x=6\\&x=3.\end{aligned}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получим:

$$\left[\begin{aligned}&x=3\\&x=6\end{aligned}\right.$$

$\boxed{\text{Ответ: } \{3\};\{6\}.}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18854

8) $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

Возведем в квадрат оба уравнение:

$\begin{cases} \sin^2 x - 2 + \dfrac{1}{\sin^2 x} = \sin^2 y \\ \cos^2 x - 2 + \dfrac{1}{\cos^2 x} = \cos^2 y \end{cases}$

Сложим эти два уравнение:

$\overbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}^{=1} - 4 + \dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} = \overbrace{\sin^2 y + \cos^2 y}^{=1}$

$\dfrac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1}}{\sin^2 x \cos^2 x} = 4 \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \dfrac{1}{4}$

$(1 - \cos^2 x)\cos^2 x = \dfrac{1}{4}$

$\cos^4 x - \cos^2 x + \dfrac{1}{4} = 0$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

$\cos x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

1) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \cos y \Leftrightarrow \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \cos y$

$\cos y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \cos y$

$\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

1) $\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \\ y = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \\ y = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$

Получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \\ y = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \\ y = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z. \end{cases} \end{array} \right.$$

← ответ

10

$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + 33 - 13a > 0, \quad 1 < a < 3$

$4x^2 - 2ax^2 + 13ax - 27x + 33 - 13a > 0$

$4x^2 - 27x + 33 > a(2x^2 - 13x + 13)$ (*)

Найдем, при каких x $2x^2 - 13x + 13 = 0$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 8 \cdot 13}}{4}$

~~$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 8 \cdot 13}}{4}$~~

~~$x =$~~

$x = \frac{13 \pm \sqrt{65}}{4}$

То есть при $\left[\begin{array}{l} x > \frac{13+\sqrt{65}}{4} \\ x < \frac{13-\sqrt{65}}{4} \end{array} \right.$ выражение $2x^2 - 13x + 13 > 0$, а

~~при $x < \frac{13-\sqrt{65}}{}$~~

при $\frac{13-\sqrt{65}}{4} < x < \frac{13+\sqrt{65}}{4}$ выражение $2x^2 - 13x + 13 < 0$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18954

Поэтому рассмотрим два случая:

1) $x \in \left(-\infty; \frac{13-\sqrt{65}}{4}\right) \cup \left(\frac{13+\sqrt{65}}{4}; +\infty\right)$

2) $x \in \left(\frac{13-\sqrt{65}}{4}; \frac{13+\sqrt{65}}{4}\right)$.

В первом случае мы неравенство (*) можем разделить на $2x^2-13x+13$, при этом знак не поменяется. Во втором случае так же разделим на $2x^2-13x+13$, но знак в таком случае поменяется на противоположный.

1) $\frac{4x^2-27x+33}{2x^2-13x+13} > a$

2) $\frac{4x^2-27x+33}{2x^2-13x+13} < a$. По условию $1 < a < 3$.

Отсюда получаем, ~~что~~ что при $x \in \left(\frac{13-\sqrt{65}}{4}; \frac{13+\sqrt{65}}{4}\right)$

$$\frac{4x^2-27x+33}{2x^2-13x+13} = 1 \text{ (т.к. } a > 1\text{)},$$ а при

$x \in \left(-\infty; \frac{13-\sqrt{65}}{4}\right) \cup \left(\frac{13+\sqrt{65}}{4}; +\infty\right)$

$$\frac{4x^2-27x+33}{2x^2-13x+13} = 3 \text{ (т.к. } a < 3\text{)}.$$

ШИФР 18854

Получаем:

а) $4x^2-27x+33=2x^2-13x+13$ $\left(x\in\left(\frac{13-\sqrt{65}}{4};\frac{13+\sqrt{65}}{4}\right)\right)$

$2x^2-14x+20=0$

$x^2-7x+10=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=2 \end{array}\right.$ (оба корня удовлетворяют условию

б) $4x^2-27x+33=2x^2-13x+13$

$x^2-7x+10=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \varnothing$, т.к. не входят в интервал $\left(-\infty;\frac{13-\sqrt{65}}{4}\right)\cup\left(\frac{13+\sqrt{65}}{4};+\infty\right)$

$\boxed{\text{Ответ: } 2; 5}$