ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18967

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	4	0	0	12	12	16	8	0	60	шестьдесят	

№1 $B = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + (0{,}2)^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2} \cdot (2{,}017)^0 \cdot \sqrt{0{,}36}$

① $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + (0{,}2)^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3} = 3^{10} \cdot 3^{-9} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \cdot 5^{-4} + 64^{\frac{1}{3}} =$

$= 3^1 + 1^{-4} + 4 = 3 + 1 + 4 = 8$

② $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2\cancel{+\sqrt{3}} + 2\cancel{-\sqrt{3}} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} =$

$= 4 + 2\sqrt{4-3} = 4 + 2 = 6$

③ $\frac{8}{6} \cdot 1 \cdot \sqrt{0{,}36} = \frac{8}{6} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}8 = \frac{4}{5}$

$\frac{4}{5}$ – 10 %

A – 100 %

$A = \dfrac{\frac{4}{5} \cdot 10\cancel{0}}{\cancel{10}} = 8$

Ответ: 8

№2

	v	t	A
I	$4x$	11 ч	$V_1 + \frac{1}{3}V_2$
II	$3x$	$\frac{V_1}{3x}$ } 18 ч	V_1
	x	$\frac{V_2}{4x}$	$\frac{V_2}{4}$

x – производительность насоса
V_1 – объём 1-го танкера
V_2 – объём 2-го танкера

$\frac{V_2}{3x}$ – ?

$$\begin{cases} \dfrac{V_1 + \frac{1}{3}V_2}{4x} = 11 \\ \dfrac{V_1}{3x} + \dfrac{V_2}{4x} = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3V_1 + V_2}{3 \cdot 4x} = 11 \\ \dfrac{4V_1 + 3V_2}{12x} = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3V_1 + V_2 = 132x \\ 4V_1 + 3V_2 = 18 \cdot 12x \end{cases}$$

$V_1 = \dfrac{132x - V_2}{3}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18967

№2 (продолжение)

$$4\cdot\frac{132x-V_2}{3}+3V_2=18\cdot 12x$$

$$4\cdot 132x-4V_2+9V_2=3\cdot 18\cdot 12x$$

$$5V_2=3\cdot 18\cdot 12x-4\cdot 132x$$

$$5V_2=12x(54-44)$$

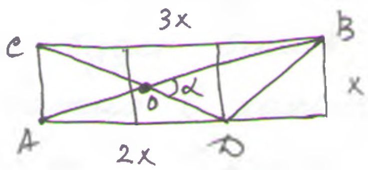
$$5V_2=120x$$

$$\frac{5V_2}{3x}=40$$

$$\frac{V_2}{3x}=8$$

Ответ: 8 часов

№3



Дано: 3 квадрата

$AB \cap CD = O$

Найти: $\angle BOD$

Решение:

x – сторона квадрата

$\triangle COB \sim \triangle DOA$ по 3-м углам ($\angle AOD = \angle COB$ – вертикальные

$\angle CBA = \angle BAD$ – накрест. леж. при $CB \parallel AD$ и сек AB

$\angle BCD = \angle CDA$ – накрест. леж при $CB \parallel AD$ и сек CD)

$$\frac{BO}{AO}=\frac{3x}{2x}$$

$$AO=\frac{2}{3}BO$$

$$BO+\frac{2}{3}BO=AB$$

$$\frac{5}{3}BO=AB$$

$$BO=\frac{3x\sqrt{10}}{5}$$

$$AB^2=\cancel{4}x^2+9x^2$$

$$AB=x\sqrt{10}$$

$$\frac{CO}{OD}=\frac{3}{2}$$

$$2CO=3OD$$

$$CO=\frac{3}{2}OD$$

$$OD+\frac{3}{2}OD=x\sqrt{5}=CD$$

$$\frac{5}{2}OD=x\sqrt{5}$$

$$OD=\frac{2x\sqrt{5}}{5}$$

$$CD^2=x^2+4x^2$$

$$CD=x\sqrt{5}$$

$$BD^2=2x^2$$

$$BD=x\sqrt{2}$$

По теореме косинусов в $\triangle BOD$:

$$BD^2=OD^2+OB^2-2\,OD\cdot OB\cos\alpha$$

$$2x^2=\frac{4x^2\cdot 5}{25}+\frac{9x^2\cdot 10}{25}-2\cdot\frac{3x\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{2x\sqrt{5}}{5}\cdot\cos\alpha$$

$$2x^2=\frac{110x^2}{25}-\frac{12x^2\cdot 5\sqrt{2}}{25}\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{12x^2\cdot 5\sqrt{2}}{25}\cos\alpha=\frac{110x^2-50x^2}{25}$$

№3 (продолжение)

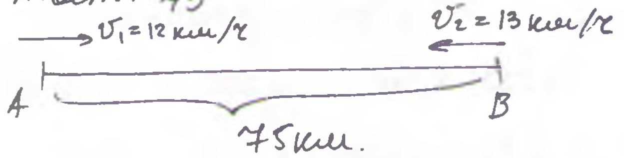
$\cos\alpha = \frac{60x^2}{25} \cdot \frac{25}{12x^2 \cdot 5\sqrt{2}}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = 45°$

Ответ: $45°$

№6



$v_c = 15$ км/ч

Т.к. велосипедисты едут навстречу друг другу, то t (время, через которое они встретятся) $= \frac{S}{v_1+v_2} = \frac{75}{12+13} = 3$ ч

Велосипедисты встретятся через 3 часа, всё это время собака будет бегать от одного велосипедиста к другому (не важно в каком направлении), т.е. собака будет бежать 3 ч. со $v_c = 15$ км/ч, значит $S_1 = 3 \cdot 15 = 45$ км – пробежит собака всего

Ответ: 45 км

№7 $\sqrt{6x-x^2-5} - \sqrt{7-2x} \geq \sqrt{8x-x^2-12}$

ОДЗ: $\begin{cases} -x^2+6x-5 \geq 0 \\ -x^2+8x-12 \geq 0 \\ 7-2x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-5)(x-1) \leq 0 \\ (x-6)(x-2) \leq 0 \\ 2x \leq 7 \end{cases}$

$x \in [2; 3,5]$

$\sqrt{6x-x^2-5} - \sqrt{7-2x} \geq \sqrt{8x-x^2-12}$

$\sqrt{6x-x^2-5} \geq \sqrt{8x-x^2-12} + \sqrt{7-2x}$

Т.к. обе части н-ва неотрицательны, то возводим в квадрат

$6x-x^2-5 \geq 8x-x^2-12+7-2x+2\sqrt{(2x-7)(x^2-8x+12)}$

$2\sqrt{(2x-7)(x^2-8x+12)} \leq 0$

$\sqrt{(2x-7)(x-6)(x-2)} = 0$

$x = 3,5$ $x = 6$ $x = 2$

пост.

Ответ: 2; 3,5

№8

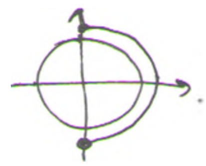
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \ (1) \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \ (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\sin x - \cos y \geq 0$

(2) $\sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x \end{cases}$$

$\cos x \geq 0$



Из (1): $\cos y = \sin^2 x - \cos x$

$\sin x - \sin^2 x + \cos x = \cos^2 x$

$\sin x + \cos x = 1$

$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = 1$

$\sqrt{2}\left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z \end{array}\right.$$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in Z$

$\sin x = 1$

$\cos x = 0$

$0 + \cos y = 1$

$\cos y = 1$

$y = 2\pi n; n \in Z$

$\sin x - \cos y = 0$ – удовл ОДЗ

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in Z$

$y = 2\pi n; n \in Z$

$x = 2\pi n; n \in Z$

$\sin x = 0$

$\cos x = 1$

$1 + \cos y = 0$

$\cos y = -1$

$y = \pi + 2\pi n; n \in Z$

$\sin x - \cos x = 1$ – удовл ОДЗ.

$x = 2\pi n; n \in Z$

$y = \pi + 2\pi n; n \in Z$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right); (2\pi n; \pi + 2\pi n); n \in Z$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(a \cdot b)c = a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18967

№ 9 $\frac{1}{(x+2014)(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)(x+2017)}+\frac{1}{(x+2017)(x+2018)}=\frac{1}{999999}$

$x+2016=t$

$$\frac{1}{(t-2)(t-1)}+\frac{1}{(t-1)t}+\frac{1}{t(t+1)}+\frac{1}{(t+1)(t+2)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{(\cancel{t}+2)(t+1)+(t-2)(t-1)}{(\cancel{t}^2-1)(t^2-4)}+\frac{t+1+t-1}{t(t^2-1)}=\frac{1}{999999}$$

$$\frac{2t^2+4}{(t^2-1)(t^2-4)}+\frac{2t}{t(t^2-1)}=\frac{(2t^2+4)t+2t(t^2-4)}{t(t^2-1)(t^2-4)}=\frac{t(2t^2+4+2t^2-8)}{\cancel{t}(t^2-1)(t^2-4)}=\frac{4t(t^2-1)}{t(t^2-1)(t^2-4)}$$

$$\frac{4t(t^2-1)}{t(t^2-1)(t^2-4)}=\frac{1}{999999}$$

$$4t(t^2-1)\cdot 999999=t(t^2-1)(t^2-4)$$

$$t(t^2-1)(4\cdot 999999-t^2+4)=0$$

$t=0$ $t^2-1=0$ $t^2=4\cdot 1000000$

$t=\pm 1$ $t=2\cdot 10^3$

$t=0;1;-1$ – пост, т.к зн. обращ. в 0 $t=2000$

$x=t-2016$

$x=2000-2016$

$x=-16$

Ответ: -16