ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19988

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	4	0	0	0	6	16	16	0	50	пятьдесят	[illegible]

10) $(2a-6)x^2+(32-10a)x-a-8<0$ $\quad a\in(2;4)$

1) $a=3$ $\quad 2x-3-8<0$ $\quad x<5,5$

2) $a=\frac{32}{10}=\frac{16}{5}$ $\quad (2\cdot\frac{16}{5}-6)x^2-\frac{16}{5}-8<0$ $\quad \frac{2}{5}x^2-\frac{56}{5}<0$; $\quad x^2=28$, $x=\pm\sqrt{28}$

$+ \quad -\sqrt{28} \quad - \quad \sqrt{28} \quad +$

3) $(2a-6)x^2+(32-10a)x-a-8\geq 0$

$D=(32-10a)^2+4(2a-6)(a+8)=1024-640a+100a+(8a-24)(a+8)=$

$=1024-540a+8a^2+64a-24a-192=8a^2-500a+832$

а) $D=0$

$8a^2-500a+832=0$

$2a^2-125a+208=0$

$D=125^2-8\cdot208=15625-1664=13961$

б) $D>0$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19988

① $0,1A = B$

ОДЗ: $(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 \neq 0$

$$B = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+(0,2)^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}\cdot(2,017)^0\cdot\sqrt{0,36} =$$

$$= \frac{3^{10}\cdot 3^{-9}+5^4\cdot 5^{-4}+2^{-\frac{6}{9}(-3)}}{2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}}\cdot 1\cdot 0,6 = \frac{3+1+2^2}{4+2\cdot\sqrt{4-3}}\cdot 0,6 = \frac{4+4}{4+2}\cdot 0,6 =$$

$$= \frac{8}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{6}}{10} = 0,8$$

т.к. $0,1A = B$, то $0,1A = 0,8 \Rightarrow A = 8$

Ответ: 8

②

Пусть скорость с которой работает насос — z, V_1 танк $= x$; V_2 танк $= y$

	1 танк.	2 танк.	
4 час	x	$\frac{1}{3}y$	$11z$
3 час	x	+ 1 час $\cdot \frac{1}{4}y$	$18z$

Сост. и реш. ур-е.

$$\begin{cases}\dfrac{x+\frac{1}{3}y}{4z}=11\\ \dfrac{x}{3z}+\dfrac{\frac{1}{4}y}{z}=18\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{3x+y}{12z}=11\\ \dfrac{x}{3z}+\dfrac{y}{4z}=18\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{3x+y}{12z}=11\\ \dfrac{4x+3y}{12z}=18\end{cases}$$

$\frac{3x+y}{11} = \frac{4x+3y}{18}$;

$54x+18y = 44x+33y$;

$10x = 15y$

$x = \frac{3}{2}y$

мы нашли x, подставим в ур-е и найдем зависимость y от z.

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{3}{2}y+\frac{1}{3}y}{4z}=11\\ \dfrac{\frac{3}{2}y}{3z}+\dfrac{\frac{1}{4}y}{z}=18\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\frac{11}{6}y}{4z}=11\\ \dfrac{y}{2z}+\dfrac{y}{4z}=18\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{11y}{24z}=11\\ \dfrac{3y}{4z}=18\end{cases}\quad y=24z$$

$$\Rightarrow \frac{y}{3z} = \frac{24z}{3z} = 8$$

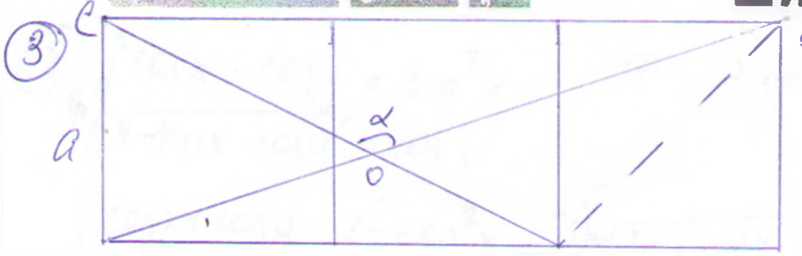
Ответ: 8 часов

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19988

3)



Пусть сторона квадрата $= a$, тогда

$CD = \sqrt{a^2+(2a)^2} = a\sqrt{5}$ по т. Пиф.

$AD = \sqrt{a^2+(3a)^2} = a\sqrt{10}$

А т.к. $AD \parallel CB$, то $\angle COB = \angle AOD$. Пусть данный угол $= \alpha$.

Δ трапецию $ACBD$:

$S_{\square} = \frac{1}{2}(2a+3a)a = \frac{5a^2}{2}$. Но она также равна $S_{\square} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{10} \cdot \sin\alpha$

$\frac{5a^2}{2} = \frac{a^2\sqrt{50}}{2}\sin\alpha$; $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{25}{50}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

Ответ: 45°

7) $\sqrt{6x-x^2-5} - \sqrt{7-2x} \geq \sqrt{8x-x^2-12}$

ОДЗ: $\begin{cases} 6x-x^2-5 \geq 0 & x\in[1;5] \\ 7-2x \geq 0 & x \leq 3{,}5 \\ 8x-x^2-12 \geq 0 & x\in[2;6] \end{cases} \Rightarrow x\in[2;3{,}5]$

$-x^2+6x-5 \geq 0$
$x^2-6x+5 \leq 0$
$D = 36-20 = 16$
$x_1 = \frac{6+4}{2} = 5$
$x_2 = \frac{6-4}{2} = 1$

$-x^2+8x-12 \geq 0$
$-x^2+8x-12 = 0$
$D = 64-48 = 16$
$x_1 = \frac{-8+4}{-2} = 2$
$x_2 = \frac{-8-4}{-2} = 6$

$6x-x^2-5-2\sqrt{(6x-x^2-5)(7-2x)}+7-2x \geq 8x-x^2-12$

$4x+2-2\sqrt{(6x-x^2-5)(7-2x)} \geq 8x-12 \quad / :2$

$2x+1-\sqrt{(6x-x^2-5)(7-2x)} \geq 4x-6$

$7-2x \geq \sqrt{(6x-x^2-5)(7-2x)}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7-2x>0 \\ (6x-x^2-5)(7-2x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 7-2x>0 \\ (6x-x^2-5)(7-2x) \leq (7-2x)^2 \end{cases} \end{array}\right.$

1) $x<3{,}5$

$(6x-x^2-5)(7-2x) \geq 0$

$x=1$ $x=5$ $x=3{,}5$

$x\in[1;3{,}5)$

2) $x<3{,}5$

$(6x-x^2-5)(7-2x) \leq (7-2x)^2$

$(7-2x)(6x-x^2-5-7-2x) \leq 0$

$(7-2x)(-x^2+4x-12) \leq 0$

$x \leq 3{,}5$ $\quad D = 16-48<0$ $\quad \varnothing$

3)

ОДЗ:

Ответ: $[2;3{,}5)$

8) 1) $\begin{cases} \cos x+\cos y=\sin^2 x \\ \sqrt{\sin x-\cos y}=\cos x \end{cases}$ ОДЗ: $\sin x-\cos y\geq 0$ $\cos x\geq 0$

2) $\begin{cases} \cos x+\cos y=1-\cos^2 x \\ \sin x-\cos y=\cos^2 x \end{cases}$

3) $\sqrt{\sin x-\cos y}+\cancel{\cos y}=1-\sin x+\cancel{\cos y}$

$\begin{cases} \sin x-\cos y=(1-\sin x)^2 \\ 1-\sin x\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x-\cos y=1-2\sin x+\sin^2 x \\ \sin x<1 \end{cases}$

4) $\sin^2 x-3\sin x+\cos y+1=0$

$D=9-4(\cos y+1)=5-4\cos y$

$\sin x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5-4\cos y}}{2}$

$\cos x+\cos y=1-\cos^2 x$

$\cos^2 x+\cos x+\cos y-1=0$

$D=1-4(\cos y-1)=5-4\cos y$

$\cos x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5-4\cos y}}{2}$

По правилу: $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$

$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$ Подставим:

$\dfrac{-1-\sqrt{5-4\cos y}}{2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3+\sqrt{5-4\cos y}}{2}\right)^2}$

$\left(-\dfrac{1+\sqrt{5-4\cos y}}{2}\right)^2=1-\left(\dfrac{3+\sqrt{5-4\cos y}}{2}\right)^2$

$\dfrac{1+2\sqrt{5-4\cos y}+5-4\cos y+9+6\sqrt{5-4\cos y}+5-4\cos y}{4}=1$

$\dfrac{20+8\sqrt{5-4\cos y}-8\cos y}{4}=1$; $5+2\sqrt{5-4\cos y}-2\cos y=1$; $2\sqrt{5-4\cos y}=-4+2\cos y$;

$\sqrt{5-4\cos y}=\cos y-2$

$5-4\cos y=\cos^2 y-4\cos y+4$

$\cos^2 y=1$

$\cos y=1$ $\cos y=-1$

$y=2\pi n$ $y=\pi+2\pi n$

Ответ: $y=2\pi n$; $\pi+2\pi n$

$x=2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\cancel{\pi+2\pi k}$

Подставим

1) $1-\cos^2 x=\cos x+1$

$\cos^2 x+\cos x=0$

$\cos x(\cos x+1)=0$

$\cos x=0$ $\cos x=-1$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $x=\pi+2\pi k$

$\notin$ ОДЗ.

2) $1-\cos^2 x=\cos x-1$

$\cos^2 x+\cos x-2=0$

$D=1+8=9$

$\cos x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$

$\cos x_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2\notin$ т.к. $\cos x\,[-1;1]$

$\cos x=1$

$x=2\pi k$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19988

9) $\frac{1}{(x+2014)(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)(x+2017)}+\frac{1}{(x+2017)(x+2018)}=\frac{1}{999999}$

Пусть: $x+2014=t$; $\frac{1}{999999}=B$

ОДЗ: $x\neq-2014;-2015;-2016;-2017;-2018$

$\frac{1}{t(t+1)}+\frac{1}{(t+1)(t+2)}+\frac{1}{(t+2)(t+3)}+\frac{1}{(t+3)(t+4)}=B$

$\frac{t+2+t}{t(t+1)(t+2)}+\frac{t+4+t+2}{(t+2)(t+3)(t+4)}=B$

$\frac{2t+2}{t(t+1)(t+2)}+\frac{2t+6}{(t+2)(t+3)(t+4)}=B$

$\frac{2\cancel{(t+1)}}{t\cancel{(t+1)}(t+2)}+\frac{2\cancel{(t+3)}}{(t+2)\cancel{(t+3)}(t+4)}=B$

$2\left(\frac{1}{t(t+2)}+\frac{1}{(t+2)(t+4)}\right)=B$

$\frac{2}{t+2}\left(\frac{t+4+t}{t(t+4)}\right)=B$

$\frac{2(2t+4)}{(t+2)t(t+4)}=B$

$\frac{4\cancel{(t+2)}}{\cancel{(t+2)}t(t+4)}=B$

$\frac{4}{t(t+4)}=B$

$4=\frac{(x+2014)(x+2018)}{999999}$

$4\cdot999999=x^2+4032x+2014\cdot2018$

$x^2+4032x+64256=0$

$D=4032^2-4\cdot64256=16.000.000$

$x_1=\frac{-4032+4000}{2}=\frac{-32}{2}=-16$

$x_2=\frac{-4032-4000}{2}=\frac{-8032}{2}=-4016$

Ответ: -16; -4016

5) $tg15\cdot tg25\cdot tg35\cdot tg85=1$

$\frac{\sin15\cdot\sin25\sin35\sin85}{\cos15\cos25\cos35\cos85}=1$

$\frac{\cancel{\frac{1}{2}}(\sin40+\sin10)\cancel{\frac{1}{2}}(\sin120+\sin50)}{\cancel{\frac{1}{2}}(\cos40+\cos10)\cancel{\frac{1}{2}}(\cos120+\cos50)}=1$

$\frac{(\sin40+\sin10)\left(\frac{\sqrt3}{2}+\sin50\right)}{(\cos40+\cos10)\left(-\frac{1}{2}+\cos50\right)}=1$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19988

4) $(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)=\frac{1}{4}x$

ОДЗ: $\begin{cases}1+x\geq 0\\ 1-x\geq 0\end{cases}$ $x\in[-1;1]$

$\sqrt{(1+x)(1-x)}+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-1=\frac{1}{4}x$

$\sqrt{(1+x)(1-x)}+\sqrt{1+x}=\frac{1}{4}x+1+\sqrt{1-x}$

$(1+x)(1-x)+2\sqrt{(1+x)(1-x)}+1+x=\frac{1}{16}x^2+1+1-x+\frac{2}{4}x+\frac{2}{4}x\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x}$

$\cancel{1}-x^2+2\sqrt{1-x^2}+x=\frac{1}{16}x^2+\cancel{1}-x\frac{1}{2}x+\frac{2}{4}x\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x}$

$-\frac{17}{16}x^2+2\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x}-2\sqrt{1-x}=0$

$\sqrt{1-x}\left(2\sqrt{1+x}-\frac{1}{2}x-2\right)-\frac{17}{16}x^2+\frac{3}{2}x=0$

$\cancel{1-x(1(1+x)}$ $-\sqrt{1-x}\left(\frac{1}{2}x-2\sqrt{1+x}+2\right)=\frac{17}{16}x^2-\frac{3}{2}x=\frac{x}{2}\left(\frac{17x}{8}-3\right)$

$(1-x)\left(\frac{1}{4}x^2+4(1+x)+4-2\cdot2\sqrt{1+x}\cdot\frac{1}{2}x+2\cdot\frac{1}{2}x\cdot2-2\cdot2\sqrt{1+x}\cdot2\right)=\cancel{\frac{289}{256}x^4-2\cdot\frac{17}{16}}$

$=\frac{x^2}{4}\left(\frac{289x^2}{64}-2\cdot\frac{17x}{8}\cdot3+9\right)$

$(1-x)\left(\frac{1}{4}x^2+4+4x+4-2x\sqrt{1+x}+2x-8\sqrt{1+x}\right)=\frac{x^2}{4}\left(\frac{289x^2}{64}-\frac{51}{4}x+9\right)$

$(1-x)\left(\frac{1}{4}x^2+8+6x-2x\sqrt{1+x}-8\sqrt{1+x}\right)=\frac{289x^4}{256}-\frac{51x^3}{16}+\frac{9x^2}{4}$

$\frac{1}{4}x^2+8+6x-2x\sqrt{1+x}-8\sqrt{1+x}-\frac{1}{4}x^3-8x-6x^2+2x^2\sqrt{1+x}+8x\sqrt{1+x}=\frac{289x^4}{256}-\frac{51x^3}{16}+\frac{9x^2}{4}$

$-8x^2+2x^2\sqrt{1+x}+\frac{47}{16}x^3-\frac{289x^4}{256}-2x+6x\sqrt{1+x}+\cancel{8\sqrt{1+x}}+8=0$