

ШИФР

30470

Класс 11

Вариант

Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания

КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	4	2	8	12	6	16	0	6	62	шестьдесят две	✗

$$B = \frac{3^{10} \cdot 3^{-9} + 5^4 \cdot 5^{-4} + 64^{\frac{1}{2}}}{2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{4-3} + 2 - \sqrt{3}} \cdot 1 \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{3+1+4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{8}{10}$$

$$A = 10B \Rightarrow A = 8 \quad \text{Ответ: } 8$$

Пусть производительность насоса x , объем первого бака - a , второго - b . В первом случае $\frac{a + \frac{1}{3}b}{4x} = 11$.

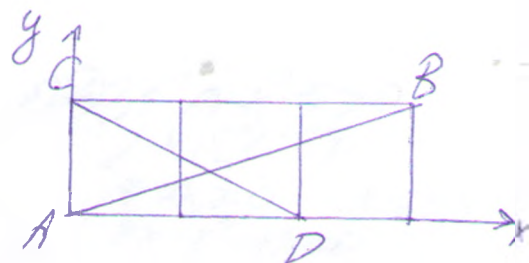
Во втором $\frac{a}{3x} + \frac{\frac{1}{3}b}{x} = 18$. Нужно найти $\frac{b}{3x}$

$$\begin{cases} \frac{a + \frac{1}{3}b}{4x} + \frac{1}{3}(\frac{b}{4x}) = 11 \\ \frac{a}{3x} + \frac{b}{4x} = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{4x} + b - \frac{a}{3x} = 11 \Rightarrow \frac{5a}{36x} = 5 \Rightarrow a = 36x \\ \frac{b}{4x} = 18 - \frac{a}{3x} \end{cases}$$

$$\frac{b}{4x} = 18 - \frac{36x}{3x} \Rightarrow \frac{b}{4x} = 6 \quad b = 24x \Rightarrow \frac{b}{3x} = \frac{24x}{3x} = 8$$

Ответ: 8

Введем систему координат в A
 $A(0;0)$. Пусть сторона квадрата - a
Координаты точек: $C(0;a)$ $D(2a;0)$



Зададим вектор $\vec{AB} = (3a;a)$ и вектор $\vec{CD} = (2a;-a)$
 $|\vec{AB}| = \sqrt{10}a$ $|\vec{CD}| = \sqrt{5}a$

Угол между векторами находится по формуле:

$$\cos \angle(\vec{AB}, \vec{CD}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}{|\vec{AB}| |\vec{CD}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{10}a \sqrt{5}a} = \frac{6a^2 - a^2}{\sqrt{50}a^2} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Лист N1



ШИФР 30470

$\cos(\vec{AB}, \vec{CD}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ Угол между прямыми АВ и CD равен 45° Ответ: 45°

$\lg 15^\circ + \lg 25^\circ + \lg 35^\circ + \lg 85^\circ = 1$ N5 $\frac{\sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \sin 85^\circ}{\cos 15^\circ \cos 25^\circ \cos 35^\circ \cos 85^\circ} = 1$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$

$\sin A \cos 10^\circ - \cos 40^\circ, \frac{\cos 50^\circ - \cos 120^\circ}{2} = \frac{\cos 40^\circ + \cos 10^\circ}{2}, \frac{\cos 50^\circ + \cos 120^\circ}{2}$

$\cos 10^\circ \cos 50^\circ - \cos 40^\circ \cos 50^\circ - \cos 10^\circ \cos 120^\circ + \cos 40^\circ \cos 120^\circ = \cos 40^\circ \cos 50^\circ + \cos 10^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \cos 120^\circ + \cos 10^\circ \cos 120^\circ$

$-2 \cos 40^\circ \cos 50^\circ = 2 \cos 10^\circ \cos 120^\circ \Rightarrow -\cos 40^\circ \cos 50^\circ = \cos 10^\circ \cos 120^\circ$

$\Rightarrow -\cos 40^\circ \sin 40^\circ = \cos 10^\circ \sin 80^\circ \cos 120^\circ = \frac{\sin 80^\circ}{2} = \sin 80^\circ \cos 120^\circ \Rightarrow$

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ те же самое верно

N6

Скорость сближения велосипедистов равна $12 + 13 = 25 \text{ км/ч} \Rightarrow$ Они

встретятся через $t = \frac{S}{V} = \frac{75 \text{ км}}{25 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} = 3 \text{ ч}$. Собака будет бегать

все эти 3 часа $\Rightarrow$ за 3 часа собака пробежит $S = 3 \cdot 15 = 45 \text{ км}$

Ответ: 45 км

N8

$\sqrt{6x - x^2 - 5} - \sqrt{8 - 2x} \geq \sqrt{8x - x^2 - 12}$

$6x - x^2 - 5 - 2\sqrt{(6x - x^2 - 5)(8 - 2x)} + 8 - 2x \geq 8x - x^2 - 12$

$8 - 2x \geq \sqrt{(6x - x^2 - 5)(8 - 2x)} \rightarrow 6x - x^2 \geq 0 \rightarrow 3x(2 - x) \geq 0$

$x \in [1, 3, 5]$

$(8 - 2x)(8 - 2x - 6x + x^2 + 5) \geq 0$

$(8 - 2x)(x^2 - 8x + 12) \geq 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{2} \quad 3,5 \quad 6$

Учитывая ОДЗ получаем $x \in [2, 3, 5]$

Ответ: $x \in [2, 3, 5]$

ОДЗ $\begin{cases} 6x - x^2 - 5 \geq 0 \\ x \in [1, 5] \end{cases}$

$\begin{cases} 8 - 2x \geq 0 \\ 8x - x^2 - 12 \geq 0 \end{cases} \quad x \leq 3,5$

$x \in [2, 6]$

$\cap x \in [2, 3, 5]$

лист N2

лист N1



ШИФР 30470

N8

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x \end{cases}$$

003: $\cos x \geq 0$
 $\sin x - \cos y \geq 0$

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 - \cos^2 x \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \cos x + \cos y = 1 - \sin x + \cos y$$

$$\cos x + \sin x = 1$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 0 \\ \sin x &= 1 \\ x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 \\ \sin x &= 0 \\ x &= 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

1) $\cos x = 0$ $\sin x = 1$

$$0 + \cos y = 1 \quad \cos y = 1 \quad y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

2) $\cos x = 1$ $\sin x = 0$

$$\cos y = -1 \quad y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad y_1 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad y_2 = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

N10

$$(2a-6)x^2 + (32-10a)x - a-8 < 0 \quad 2 < a < 4$$

$$2ax^2 - 6x^2 + 32x - 10ax - a - 8 < 0$$

$$a(2x^2 - 10x - 1) - 6x^2 + 32x - 8 < 0 \quad a(2x^2 - 10x - 1)a < 6x^2 - 32x + 8$$

Если $2x^2 - 10x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{5-\sqrt{28}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{28}}{2}; +\infty) \Rightarrow$

$a < \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1}$ Чтобы подошло для любого $a \in (2; 4)$

то $\frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1} \geq 4 \quad 6x^2 - 32x + 8 \geq 8x^2 - 40x - 4 \quad 2x^2 - 8x - 12 \leq 0$

$$x^2 - 4x - 6 \leq 0$$

$$x \in (-\infty; \frac{4-\sqrt{40}}{2}] \cup [\frac{4+\sqrt{40}}{2}; +\infty)$$

Сравним $\frac{4+\sqrt{40}}{2}$ и $\frac{5+\sqrt{28}}{2}$ $\sqrt{40}$ и $1+\sqrt{28} \rightarrow 40$ и $28+2\sqrt{28} \Rightarrow$

8 и $\sqrt{28} \Rightarrow \frac{4+\sqrt{40}}{2} > \frac{5+\sqrt{28}}{2} \Rightarrow x \in [\frac{4-\sqrt{40}}{2}; \frac{5-\sqrt{28}}{2}] \cup (\frac{5+\sqrt{28}}{2}; \frac{4+\sqrt{40}}{2}]$

лист N3

лист N1

Если $2x^2 - 10x - 1 < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{5 - \sqrt{28}}{2}, \frac{5 + \sqrt{28}}{2} \right) \Rightarrow$

$a > \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1}$ чтобы удовлетворили все а6(2,4)

$2 \geq \frac{6x^2 - 32x + 8}{2x^2 - 10x - 1}$ ~~$6x^2 - 32x + 8 \leq -4x$~~

$6x^2 - 32x + 8 \geq 4x^2 - 20x - 2 \quad (2x^2 - 10x - 1 < 0)$

$2x^2 - 12x + 10 \geq 0$

$D = 144 - 80 = 64 \quad x_1 = \frac{12 + 8}{4} = 5 \quad x_2 = 1 \Rightarrow x \in [1, 5]$

Сравним ~~5 и 5~~ $\frac{5 + \sqrt{28}}{2} > 5 \quad \frac{5 - \sqrt{28}}{2} < 1 \Rightarrow x \in [1, 5]$

Объединяя получим $x \in \left[\frac{4 - \sqrt{40}}{2}, \frac{5 - \sqrt{28}}{2} \right) \cup [1, 5] \cup \left(\frac{5 + \sqrt{28}}{2}, \frac{4 + \sqrt{40}}{2} \right]$

N4

$(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = \frac{1}{4}x$

$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1, 1]$

методом подбора можно
найти корень $x=0$