


$$(ab)c = a(bc)$$

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

ШИФР

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

[illegible][illegible][illegible]

Номер варианта	2	2	2
----------------	---	---	---

10-71



ШИФР

10-71

Класс 11

Вариант 22

Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ		Подпись
							Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	4	8	8	12	78	семьдесят восемь	

12 16 10

№1

$$A = \left(3,018 - \frac{2,4\sqrt{\frac{1}{3}} - 9\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{2\frac{1}{12}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{27}}{1\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{2} + 20\sqrt{\frac{1}{50}} - \sqrt{32}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \cdot \left(\frac{1}{10} \right)^{-3} =$$

$$= \left(3,018 - \frac{\frac{12}{5}\sqrt{\frac{1}{3}} - 9\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{25}{12}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{3}}{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{2} + 4\sqrt{\frac{1}{2}} - 4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \cdot 1000 = \left(3,018 - \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \frac{5}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{6}\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \cdot 1000 =$$

$$\cdot 1000 = \left(3,018 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \cdot 1000 = 2018$$

45

Ответ: 2018

№2

Пусть шкалы Реомюра и Фаренгейта задаются линейно относительно шкалы Цельсия

$$\begin{cases} f = ax + b \\ r = cx + d \end{cases}$$

$$\text{при } x=0 \quad \begin{cases} f=32 \Rightarrow b=32 \\ r=0 \Rightarrow d=0 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} f = ax + 32 \\ r = cx \end{cases}$$

$$\text{при } x=100: \begin{cases} 212 = a \cdot 100 + 32 \\ 80 = c \cdot 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1,8 \\ c = 0,8 \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} f = 1,8x + 32 \\ r = 0,8x \end{cases}$$

Теперь при $x = 1,8x + 32$ $x = -40$ (показание по Цельсию и Фаренгейту совпадают)

$$r = 0,8 \cdot (-40) = -32^\circ - \text{по Реомюру}$$

Ответ: -32°

45

ШИФР _____

№3

$$\sqrt[3]{x \sqrt[3]{x \dots}} = 64$$

$$x(x(x \dots)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} = 64$$

$$x^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots} = 64$$

Показатель степени – сумма всех членов
геометрической прогрессии с $b_1 = 1$ $q = \frac{1}{3}$

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Т.о. $x^{\frac{3}{2}} = 64$

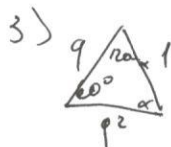
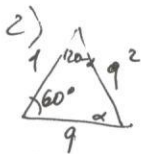
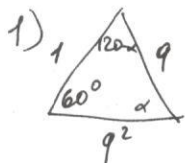
$$x = 16$$

Ответ: 16

5 40

Пусть дан ~~единичный~~ ^{№4} ~~треугольник~~
Всего 3 расположения угла и сторон

Пусть одна из сторон равна 1, тогда
другие q и q^2



$$\sin(120^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha$$

По теореме синусов

$$1) \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{q}{\sin 60^\circ} = \frac{q^2}{\sin(120^\circ - \alpha)}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2q} \\ \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}q}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2q} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \frac{3}{4q^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2q} = \frac{\sqrt{3}q}{2} \end{cases} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{4q^2 - 3}}{q} + \frac{1}{q} = 2q$$

$$\sqrt{4q^2 - 3} = 2q^2 - 1$$

$$4q^2 - 3 = 4q^4 - 4q^2 + 1$$

$$4q^4 - 8q^2 + 4 = 0$$

$$q = 1 \Rightarrow \alpha \text{ равнос. } \Delta (\alpha = 60^\circ)$$

5 80



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР _____

$$2) \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{q}{\sin(120^\circ - \alpha)} = \frac{q^2}{\sin 60^\circ}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2q^2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2q} \end{cases}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - \frac{3}{4q^4}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{4q^2} = \frac{\sqrt{3}}{2q} \quad \cdot 4$$

$$\frac{\sqrt{4q^4 - 3}}{q^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{2}{q}$$

$$\sqrt{4q^4 - 3} = 2q - 1$$

$$4q^4 - 3 = 4q^2 - 4q + 1$$

$$4q^4 - 4q^2 + 4q - 4 = 0$$

$$q^4 - q^2 + q - 1 = 0$$

$$q^2(q-1)(q+1) + (q-1) = 0$$

$$(q-1)(q^3 + q^2 + 1) = 0 \quad q = 1 \Rightarrow \text{равностор. } \Delta$$

$$3) \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{q}{\sin \alpha} = \frac{q^2}{\sin(120^\circ - \alpha)}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}q}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}q^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - \frac{3q^2}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}q}{2} = \frac{\sqrt{3}q^2}{2} \quad \cdot 4$$

$$\sqrt{4 - 3q^2} + q = 2q^2$$

$$4 - 3q^2 = 4q^4 - 4q^3 + q^2$$

$$4q^4 - 4q^3 + 4q^2 - 4 = 0$$

$$q^4 - q^3 + q^2 - 1 = 0$$

$$q^3(q-1) + (q-1)(q+1) = 0$$

$$(q-1)(q^3 + q + 1) = 0$$

$$q = 1 \Rightarrow \text{равностор. } \Delta$$

Ответ: треугольник только равносторонний

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

$$F = ma$$

ШИФР

N5

$$\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$\frac{3 - 4\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - 1}{\cos^2 2\alpha + 3 + 4\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - 1} = 1 - 2\cos 2\alpha \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$\frac{\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1}{\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1} = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$\left(\frac{\cos 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha + 1} \right)^2 = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$\left(\frac{-2\sin^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha} \right)^2 = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$\operatorname{tg}^4 \alpha = \operatorname{tg}^4 \alpha \quad 7.7.9$$

примем, что при
2) $n = k$ верно

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

3) мат индукции $n = k+1$

$$\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2)}{\frac{k(k+1)(k+2)}{3}} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{3} (k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

верно 7.7.9

N8 $\begin{cases} x^2 - 6y^2 - xy - 2x - 11y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - (y+2)x - 6y^2 + 11y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D &= y^2 + 4y + 4 + 24y^2 - 44y + 12 = \\ &= 25y^2 - 40y + 16 = (5y - 4)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{y+2 \pm (5y-4)}{2} \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; 2)$

$(2; 1)$

$(\frac{11}{5}; \frac{2}{5})$

$(-\frac{11}{5}; -\frac{2}{5})$

N6

Т.к. велосипедисты встретятся
через $\frac{300}{25+25} = 6$ часов, а оса
летает все это время, то она
прелетит $27 \cdot 6 = 162$ км

Ответ: 162 км

125

N7

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

применим мат индукция

1) база $n=1$ $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$ верно

125

160

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$$

ШИФР

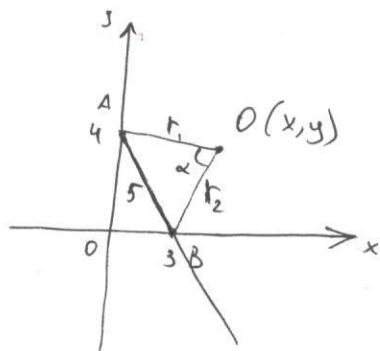
№10 ~~Решая~~ $z = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} - \sqrt{y^2 + (x-3)^2}$

Рассмотрим каждый корень:

Пусть $r_1 = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$ - это расстояние от точки (x, y) до точки $A(0; 4)$

$r_2 = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ - расстояние от точки (x, y) до точки $B(3; 0)$

Представим графически



~~Реш~~ $AB = \sqrt{9+16} = 5$

Докажем, что максимальное значение $z = 5$, т.е. $(r_1 - r_2)_{\max} = 5$

Возьмем произвольную точку O не на прямой AB (она рис.)
тогда $AO = r_1$, $BO = r_2$

Теорема косинусов $25 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha$
 $z = r_1 - r_2 \Rightarrow z^2 = (r_1 - r_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2$
 $\Rightarrow 25 = z^2 + 2r_1 r_2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow 25 = z^2 + 2r_1 r_2 (1 - \cos \alpha)$$

$$z^2 = 25 - 2r_1 r_2 (1 - \cos \alpha)$$

т.к. O не лежит на AB то $\cos \alpha > 0 \Rightarrow z^2 \leq 25$, т.е. $z \leq 5$

А условию удовлетворят только точки, лежащие на прямой AB и выше точки B , т.е. удовлетворяющие уравнению $y > kx + b$

$$y = -\frac{4}{3}x + 4; \quad x \geq 3$$

$$\begin{aligned} 4 &= b \\ 0 &= 3k + 4 \Rightarrow k = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $y = -\frac{4}{3}x + 4; \quad x \geq 3$ Проверим $(3; 0)$
 $(6; -4)$

105