



ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

[illegible]

Фамилия	Ф	А	З	Л	Е	Т	И	Н	О	В
Имя	Э	Д	У	А	Р	Д				
Отчество	Ф	Л	О	Р	И	Д	О	В	И	Ч

10-3

[illegible]

Номер варианта	2	2	
----------------	---	---	--



$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

10-3

Класс 11

Вариант 22

Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	10	9	Σ	Подпись
							Цифрой					
Оценка	4	4	4	8	8	12	12	8	0	0	Σ 52+8=60	Шар

$$1. A = \left(3,018 - \frac{2,4 \cdot \sqrt{8\frac{1}{3}} - 9\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{12} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{27}}{1\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}} - \sqrt{0,5} + 1,5\sqrt{2} + 20\sqrt{\frac{1}{50}} - \sqrt{32}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \cdot (0,1)^{-3} =$$

$$= \left(3,018 - \frac{(12\sqrt{\frac{1}{3}} - 9\sqrt{\frac{1}{3}} + 2,5\sqrt{\frac{1}{3}} + 0,5\sqrt{\frac{1}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{3}}) \cdot \sqrt{2}}{(4\sqrt{\frac{1}{2}} - 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{2}} + 4\sqrt{\frac{1}{2}} - 8\sqrt{\frac{1}{2}}) \cdot \sqrt{3}} \right) \cdot 10^3 =$$

$$= \left(3,018 - \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2} \right) \cdot 10^3 = 2018. \quad \text{Ответ: } 2018.$$

4

Цельсий	Реклам	Фаренгейт
0	0	32
100	80	212
x	y=?	x

Решение:

Из условия имеем:

$$\begin{cases} \Phi = k \cdot U_z + 32 \\ P = 0,8 \cdot U_z \end{cases}, \text{ где } k - \text{некий коэффициент}$$

Φ - фаренгейт
 U_z - цельсий
 P - реклам.

Подставив табличные значения в систему, найдём k : $100k + 32 = 212 \Rightarrow k = 1,8$; Тогда:

$$x \cdot 1,8 + 32 = x$$

$$0,8x = -32$$

$$x = -40$$

$$\text{Тогда } y = 0,8 \cdot (-40) = -32.$$

Ответ: -32.

4

$$3. x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \dots}}} = 64 \quad (*)$$

Возведём в куб обе части уравнения.

$$x^3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \dots}} = 64^3$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР _____

$$\underbrace{x^3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \dots}}}_{64} = 64^3$$

← так как по условию $x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \dots}} = 64$

Тогда $x^3 \cdot 64 = 64^3$

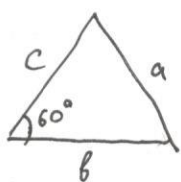
$$x^3 = 64^2$$

Отсюда $x = 16$.

Ответ: 16.

Решение:

4. Дано:



длины сторон образуют геометрическую прогрессию $\Rightarrow$
 $a = c \cdot q$, а будет вторым членом геометрической прогрессии, т.к.
 $b = c \cdot q^2$ лежит напротив угла в 60° ($\sum \text{углов} = 180^\circ$).

По теореме косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 60^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc.$$

То есть $(c \cdot q)^2 = (c \cdot q^2)^2 + c^2 + (c \cdot q^2) \cdot c$

$$q^2 = q^4 + 1 - q^2$$

$$(q^2 - 1) = 0$$

$q = 1$, это быть не может, так как стороны образуют геометрическую прогрессию. А по определению $q \neq 1$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Такие треугольники не существуют.

Ответ: такие треугольники не существуют.

5. Доказать тождество:

$$\frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \pm \tan^4 \alpha$$

Мы знаем, что:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 - (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Тогда

$$\frac{3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha - 4 \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 - (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2}{3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha + 4 \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 - (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2} = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$\frac{8 \sin^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 - 1 - (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2}{8 \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 - 1 - (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2} = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$\frac{8 \sin^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 1)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1) - (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2}{8 \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 1)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1) - (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2} = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$\frac{8 \sin^2 \alpha + (-2 \sin^2 \alpha)(2 \cos^2 \alpha) - (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2}{8 \cos^2 \alpha + (-2 \sin^2 \alpha)(2 \cos^2 \alpha) - (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2} = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$\frac{8 \sin^2 \alpha - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{8 \cos^2 \alpha - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha \quad \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \right)$$

$$\operatorname{tg}^4 \alpha = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

что и требовалось доказать.

6. Дано:

$$S = 300 \text{ км}$$

$$v_1 = v_2 = v = 25 \text{ км/ч}$$

$$v_{\text{встр}} = 27 \text{ км/ч}, S_{\text{встр}} = ?$$

Решение:

$$t_{\text{встр}} = \frac{S}{2v} = \frac{300}{50} = 6 \text{ ч}^{12}$$

$$S_{\text{встр}} = 27 \cdot 6 = 162 \text{ км}$$

Ответ: 162 км

$$(S = v_{\text{встр}} \cdot t_{\text{встр}})$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

$$m = \frac{h}{\lambda}$$

ШИФР

7. Доказать тождество

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Воспользуемся методом мат. индукции

$k = n$

Предположим, что для n тождество верно, тогда оно верно для k .
Если верно для k , то верно и для $(k+1)$.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$\underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1)}_{\frac{k(k+1)(k+2)}{3}} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Тогда: $\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

$$\frac{k}{3} + 1 = \frac{k+3}{3}$$

$$\frac{k+3}{3} = \frac{k+3}{3}$$

$k=k \Rightarrow$ наше предположение верно, что и требовалось доказать. (и для n тоже)

8.
$$\begin{cases} x^2 - 6y^2 - xy - 2x + 11y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 6y^2 + y(x-11) + 2x - x^2 + 3 = 0 \\ y^2 = 5 - x^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Решим уравнение (1) относительно y :

$$D = (x-11)^2 - 6 \cdot 4 \cdot (2x - x^2 + 3) = 25x^2 - 70x + 49 = (5x-7)^2$$

$$y = \frac{-x+11 \pm (5x-7)}{12}$$

$$y_1 = \frac{4x+4}{12} = \frac{x+1}{3}$$

$$y_2 = \frac{-6x+18}{12} = \frac{3-x}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{3} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad + \quad \begin{cases} y = \frac{3-x}{2} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

ШИФР

$$\begin{cases} x^2 + \frac{x^2}{9} = 5 \\ x^2 + \frac{9-6x+x^2}{4} = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x^2 = 45 \\ 4x^2 + 9 - 6x + x^2 = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 4,5, \quad y^2 = 0,5 \\ 5x^2 - 6x - 11 = 0, \quad D_1 = 9 + 11 \cdot 5 = 8^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{4,5} \\ y = \pm\sqrt{0,5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3+8}{5} = 1,2 & x_2 = \frac{3-8}{5} = -1 & y_1 = \frac{3-1,2}{2} = \frac{1,8}{2} = 0,9 & y_2 = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{4,5}; \sqrt{0,5}); (-\sqrt{4,5}; -\sqrt{0,5}); (1,2; 0,9); (-1; 2)$.

10. Найти x и y такие, что z принимает наибольшее значение.

$$z = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} - \sqrt{y^2 + (x-3)^2}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} - \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 9}$$

, Пусть $x^2 + y^2 = A$, тогда:

$$z = \sqrt{A - 8y + 16} - \sqrt{A - 6x + 9}$$

z будет наибольшим при наибольшей разнице двух элементов.

Очевидно, наибольшая разность будет при наименьшем $y \geq 0$ и наибольшим x .

$$\text{При } y \rightarrow 0 \quad z = \sqrt{x^2 + 16} - \sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{x^2 + 16} - |x-3|$$

$$\text{При } x \geq 3 \quad z = \sqrt{x^2 + 16} - x + 3. \quad \text{При } x \rightarrow \infty \quad z \rightarrow 3.$$

$$\text{При } x < 3 \quad z = \sqrt{x^2 + 16} + x - 3. \quad \text{При } x \rightarrow 3 \quad z \rightarrow 5 \text{ и это является наибольшим значением.}$$

Отсюда ответ: (3; 0).

9. Решить неравенство.

$$\cos^2 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x \leq -\frac{1}{8}$$

$$\text{Мы знаем, что } \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \text{и}$$

$$\sin 3x = 4\sin^3 x + 3\sin x, \quad \text{Тогда:}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

$$u = \frac{v}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ШИФР _____

$$\cos^2 x (4\cos^3 x - 3\cos x) - \sin^3 x (3\sin x - 4\sin^3 x) \leq -\frac{1}{8}$$

$$4(\sin^6 x + \cos^5 x) - 3(\sin^4 x + \cos^3 x) \leq -\frac{1}{8}$$

$$8\sin^4 x (3 - 4\sin^2 x) + 8\cos^3 x (3 - 4\cos^2 x) \geq 1$$

//Евм

$$\sin x = a \quad \text{то} \quad \cos x = \pm 1$$

$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ является корнем.

$$(4\sin^6 x - 3\sin^4 x) + (4\cos^5 x - 3\cos^3 x) \leq -\frac{1}{8}$$

~~$\sin x = \frac{1}{2}$~~

08

