

$E=mc^2$



ШИФР 7894

Класс 11 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	0	0	10	20	70	семьдесят	

10) $A^3 + 3A = A(A^2 + 3)$, $A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

$((\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}})((\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}})^2 + 3) =$

$= (\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}} ((\sqrt{5}+2)^{\frac{2}{3}} - 2(\sqrt{5}-4)^{\frac{1}{3}} + (\sqrt{5}-2)^{\frac{2}{3}} + 3) =$

$= ((\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}})((\sqrt{5}+2)^{\frac{2}{3}} + 1 + (\sqrt{5}-2)^{\frac{2}{3}}) =$

$= (\sqrt{5}+2) - (\sqrt{5}-2) = 4$

Ответ: 4

85 ~~восемьдесят~~
и 5 (АПЕЛЛЯЦИЯ)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9) \\
 & (x^2-4x+3)(x-5) = (x^3-9x) \\
 & x^3-4x^2+3x-5x^2+20x-15-x^3+9x=0 \\
 & -9x^2+32x-15=0 \\
 & 9x^2-32x+15=0 \\
 & D = 256-135=121 \\
 & \begin{cases} x_1 = \frac{16+11}{9} = 3 \\ x_2 = \frac{16-11}{9} = \frac{5}{9} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{\frac{5}{9}; 3\right\}$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2 \\
 & \sqrt{3x+1} = 2 - \sqrt{x-1} \rightarrow 2 \\
 & 3x+1 = 4 - 4\sqrt{x-1} + x-1 \\
 & 2(x-1) = -4\sqrt{x-1} \\
 & 1-x = 2\sqrt{x-1} \rightarrow 2 \\
 & 1-2x+x^2 = 4x-4 \\
 & x^2-6x+5=0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ОДЗ: } & \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1 \\
 & 2-\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \\
 & 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1x_2=5 \end{cases} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=5 \end{cases} \text{ посторонний } \\
 \text{корень.}$$

Ответ: $\{1\}$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2} \\
 & \frac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \\
 & \frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{(1-x)}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline -2 \quad -1 \quad 1 \end{array} \rightarrow x \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 7894

⑦ по свойству арифметической прогрессии:

$$2 \lg(2^x - 1) = \lg 2 + \lg(2^x + 1)$$

$$\lg(2^x - 1)^2 = \lg(2 \cdot 2^x + 2)$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1)^2 = 2 \cdot 2^x + 2$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 - 2 \cdot 2^x - 2 = 0$$

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 1 = 0$$

$$\square 2^x = t, t > 0$$

$$t^2 - 4t - 1 = 0$$

$$D = 4 + 1 = 5$$

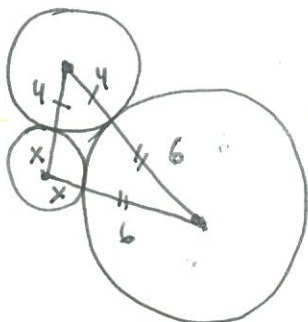
$$\begin{cases} t_1 = 2 + \sqrt{5} \\ t_2 = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

посторонний
корень

$$\Rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

Ответ: при $x = \log_2(2 + \sqrt{5})$

⑧



по Th Пифагора:

$$(x+4)^2 + (x+6)^2 = (4+6)^2$$

$$x^2 + 8x + 16 + x^2 + 12x + 36 - 100 = 0$$

$$2x^2 + 20x - 48 = 0$$

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -10 \\ x_1 \cdot x_2 = -24 \end{cases}$$

$\begin{cases} x_1 = -12 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ посторонний
корень

$\Rightarrow$ радиус меньшей окружности 2

Ответ: 2

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$


ШИФР 7894

$$④ \log_3 x + \log_3 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$$

$$\text{УЗ: } x > 0$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x \left(\frac{6+3+2}{6}\right) = \frac{11}{12}$$

$$\frac{11}{6} \cdot \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{3}$$

Ответ: $\{\sqrt{3}\}$

$$⑤ 8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$$

$$8 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 1 \leq 0$$

$$\text{]} 2^x = t, t > 0$$

$$8t^2 - 6t + 1 \leq 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_1 = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{3-1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{1}{4} \leq 2^x \leq \frac{1}{2}$$

$$2^{-2} \leq 2^x \leq 2^{-1}$$

$$\Rightarrow x \in [-2; -1] \quad \text{Ответ: } x \in [-2; -1]$$

порода	кол-во	
сиб	$3x - 13$	17
анг	x	10
перс	$3x$	30
сиам	$2x$	20

$$2x + 3x + x + 3x - 13 = 44$$

$$9x = 90$$

$$x = 10$$

Ответ: сибирских пород 17 шт,
ангорских пород 10 шт,
персидских пород 30 шт,
сиамских пород 20 шт.

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$


ШИФР 7894

$$\textcircled{9} \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \quad (1) \end{cases}$$

$$1) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \quad | \cdot (1 + \operatorname{tg} x), \operatorname{tg} x \neq -1$$

$$\operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg} x) + 1 - \operatorname{tg} x - \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)(1 + \operatorname{tg} x) = 0$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + 1 - \operatorname{tg} x - \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg} x) = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 - 3 + 2\sqrt{3} - 3 \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x \cdot (2\sqrt{3} - 3) - 2 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = t}$$

$$t^2 + t(2\sqrt{3} - 3) - 2 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$D = (2\sqrt{3} - 3)^2 - 4(2\sqrt{3} - 2) = 12 - 12\sqrt{3} + 9 - 8\sqrt{3} + 8 = 29 - 20\sqrt{3}$$

$$\left[\begin{aligned} t_1 &= (3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}) \cdot \frac{1}{2} \\ t_2 &= (3 - 2\sqrt{3} - \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}) \cdot \frac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

$$29 - 20\sqrt{3} < 0$$

$$\left[\begin{aligned} x_1 &= \arctg\left(\frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{29 - 20\sqrt{3}})\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= \arctg\left(\frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{3} - \sqrt{29 - 20\sqrt{3}})\right) + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} y_1 &= \frac{\pi}{4} - \arctg\left(\frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{29 - 20\sqrt{3}})\right) - \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y_2 &= \frac{\pi}{4} - \arctg\left(\frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{3} - \sqrt{29 - 20\sqrt{3}})\right) + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right.$$

Ответ: $(\arctg(\frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}) + \pi n; \frac{\pi}{4} - \arctg(\frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}) - \pi n), n \in \mathbb{Z};$

$(\arctg(\frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{3} - \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}) + \pi m; \frac{\pi}{4} - \arctg(\frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{3} - \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}) - \pi m), m \in \mathbb{Z})$