ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Площадка написания
г. Екатеринбург, МАОУ СОШ с углубленным изучением отдельных предметов № 53

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 88577 Класс 11

Вариант 11 Дата 19.02.2022

Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | ~~26~~ 30 | |

Оценка цифрами: 51

Оценка прописью: ~~Сорок семь~~ Пятьдесят один

Подпись

Внимание! 6 задача – 30 (тридцать) б.
Баеева – /Баеева/
/Воскобойникова/

№2. По условию $x_0 = \frac{1}{n}$.

Тогда $x_1 = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$;

$x_2 = \frac{1}{n-2} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)}\right) = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)(n-2)} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$;

и так далее.

Дробь $\frac{1}{n(n-1)}$ можно представить в виде выражения $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{\cancel{n-n}+1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$.

Аналогично для каждой следующей дроби.

Тогда выражение $S_n$ можно представить в виде $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \dots + \frac{1}{n-(n-1)} - \frac{1}{n-(n-2)}$. Объединим элементы в группы:

$S_n = \left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2}\right) \dots$

Нетрудно заметить, что первый элемент предыдущей группы при вычитании из него 2го элемента следующей группы образует ноль.

Тогда единственным элементом выражения $S_n$, который останется после вычитания элементов, будет $\frac{1}{n-(n-1)}$, т.к. для него нет подобных слагаемых $\Rightarrow S_n = \frac{1}{n-(n-1)} = 1$. Ответ: 1.

10

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

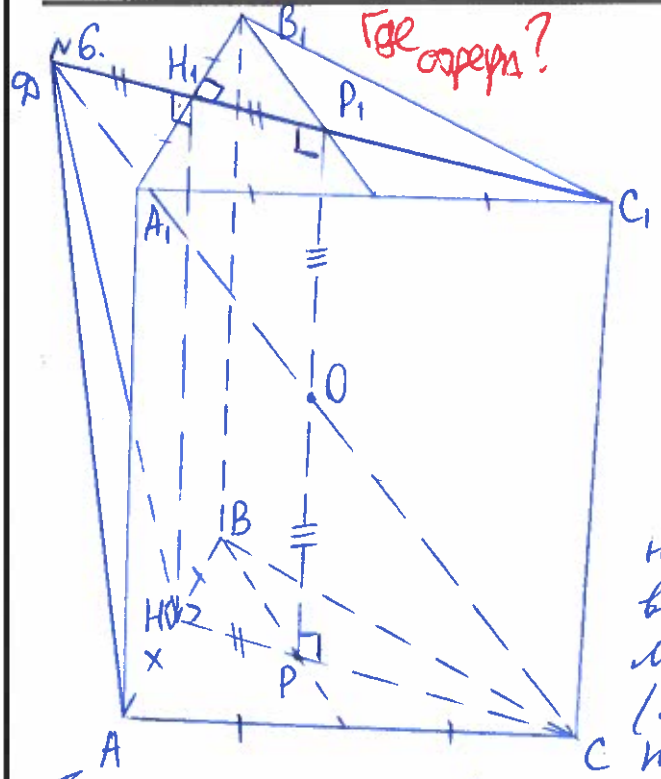
1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания
г. Екатеринбург, МАОУ СОШ с углубленным изучением отдельных предметов № 53

Шифр 88577 Класс 11

Вариант 11 Дата 19.02.2022




Дано: правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$; описанная сфера, радиус 3 (не изображена на рисунке); $CD$ – диаметр сферы; $AD=2\sqrt{6}$.

Найти: $V$ – ? – объём $ABCA_1B_1C_1$

Решение: обозначим сторону основания $a$ ($AB=BC=AC=A_1B_1=B_1C_1=A_1C_1=a$, т.к. в правильной треугольной призме основания – правильные треугольники), высоту призмы $h$ ($AA_1=BB_1=CC_1=h$, т.к. призма по условию правильная).

Т.к. призма правильная, то осевое сечение сферы, описанной вокруг данной призмы, будет проходить через высоту призмы (на рисунке – $PP_1$), и центр сферы – середина высоты (точка $O$). Вывод о том, что $PP_1$ – высота, на которой лежит центр сферы, следует из дополнительного построения биссектрис углов $B$ и $C$, $B_1$ и $C_1$ оснований, которые также являются медианами и высотами по св-ву равностороннего треугольника. Отсюда следует, что $AH=\frac{a}{2} \Rightarrow CH=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{a^2\sqrt{3}}}{\sqrt{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ по теореме Пифагора для $\triangle CAH$. Тогда $CP=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $HP=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ по свойству медиан. (1)

Т.к. $O$ – центр сферы, $C$ лежит на сфере, то $OC=3$ – радиус сферы. По теореме Пифагора для $\triangle OPC$ $OP=\sqrt{9-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{81-3a^2}}{3}=\frac{h}{2} \Rightarrow h=\frac{2}{3}\sqrt{81-3a^2}$. (2) Т.к. $P_1O \parallel CC_1$ (т.к. призма правильная), и $O$ – середина $CD$ как центр сферы,

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Площадка написания

г. Екатеринбург, МАОУ СОШ с углубленным изучением отдельных предметов № 53

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

| | | | |
|---|---|---|---|
| Шифр | 88577 | Класс | 11 |
| Вариант | 11 | Дата | 19.02.2022 |

то $OP_1$ - средняя линия $\triangle DC_1C \Rightarrow C_1P_1 = P_1D = CP = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Т.к. $P_1D = C_1P_1 = \frac{2}{3}C_1H_1$ ($H_1$ - проекция точки $H$ на плоскость $A_1B_1C_1$), $H_1P_1 = \frac{1}{3}C_1H_1$, то $H_1D = \frac{1}{3}C_1H_1 = H_1P = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. По теореме Пифагора для $\triangle DHH_1$ $DH^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2$ ($HH_1 = AA_1 = h$). По теореме о трёх перпендикулярах $DH \perp AB \Rightarrow \triangle DAH$ - прямоугольный $\Rightarrow$ по теореме Пифагора $DH^2 = AD^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (2\sqrt{6})^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Тогда $DH^2 = \frac{3a^2}{36} + h^2 = 24 - \frac{a^2}{4}$, и из (2)

$$\frac{3a^2}{36} + \frac{4}{9}(81-3a^2) = 24 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 3a^2 + 16(81-3a^2) = 24\cdot 36 - 9a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 16(27-a^2) = 24\cdot 12 - 3a^2 \Leftrightarrow a^2 - 16a^2 + 3a^2 = -16\cdot 27 + 24\cdot 12 \Leftrightarrow 12a^2 = -24\cdot 12 + 16\cdot 27 \Leftrightarrow a^2 = 12 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}. \quad (3).$$

$$V = S_{ABC}h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{81-3a^2} = \frac{(2\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{81-3(2\sqrt{3})^2} =$$

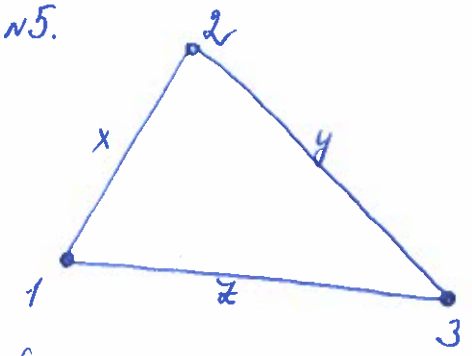
$$= \frac{\cancel{12}^{3}\sqrt{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{81-36} = 3\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{45} = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}\cdot 2\cdot 3\sqrt{5}}{\cancel{3}} = 6\sqrt{15},$$

используя утверждения (2) и (3).

Ответ: $6\sqrt{15}$.

26 Неточный рисунок! Задача решена правильно, ход решения правильный и обоснованный 30б

№5.




Обозначим длины дорог $x, y, z$, как показано на рисунке. Тогда, по условию:

$$\begin{cases} x+y = 3z \\ z+y = x+a \\ x+z = 60. \end{cases}$$

При $a = 30$:

$$\begin{cases} x+y = 3z \\ z+y = x+30 \\ x+z = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z = 3z-x-30 \\ x+z = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-(60-x) = 3(60-x)-x-30 \\ z = 60-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

Бакеева - (Лабакеева)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания: г. Екатеринбург, МАОУ СОШ с углубленным изучением отдельных предметов № 53

Шифр 88577 Класс 11

Вариант 11 Дата 19.02.2022

$\Leftrightarrow x-60+x=180-3x-x-30 \Leftrightarrow 6x=210 \Leftrightarrow x=\frac{210}{6}=35$ км $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow z=60-x=60-35=25$ км $y=3z-x=75-35=40$ км

Длины дорог — 25 км; 35 км; 40 км.

Расположение станций в соответствии с условием возможно только при выполнении системы неравенств $\begin{cases} z<x+y \\ y<x+z \\ x<y+z \end{cases}$. Эта система описывает правило треугольника, который составлен дорогами между станциями. Отсюда: $x+a>x \Rightarrow a>0$; $x<y+z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3z-y<y+z \Leftrightarrow 2z<2y \Leftrightarrow z<y$; $y<x+z \Leftrightarrow y<60$.

Тогда: $\begin{cases} z<y \\ y<60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z<y \\ z<60 \\ y<60 \end{cases} \Rightarrow z+y<120 \Leftrightarrow x+a<120 \Leftrightarrow$

Кроме того, $z<x+y \Rightarrow 60-x<x+y \Rightarrow x>30-\frac{y}{2} \Rightarrow a<90$ ?

$\Leftrightarrow a<\cancel{120}\ 90 \Rightarrow a\in(0;\cancel{120}\ 90)$ км.

10 неверно найдены ограничения на a!

Ответ: $(0;90)$ км.

№4. Для того, чтобы выполнялось условие, необходимо, чтобы каждая из трёх частей была не менее 50 см и не более 100 см в длину.

Отрезок $[50;100]$ составляет $\frac{1}{4}$ часть отрезка $[0;200] \Rightarrow P=\frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$. ? 0

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания
г. Екатеринбург, МАОУ СОШ с углубленным изучением отдельных предметов № 53

Шифр 88577 Класс 11
Вариант 11 Дата 19.02.2022

№1. $x^9-2021x^3-\sqrt{2022}=0$

$x^9-2021x^3=\sqrt{2022}$

Замена: $x^3=t$

$t^3-2021t=\sqrt{2022}$.

$x^9-2021x^3>0$

$x^3(x^6-2021)>0$

$\begin{cases} x>0 \\ x^6>2021 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<0 \\ x^6<2021 \end{cases}$

Пусть $f(t)=t^3-2021t$.

Функция монотонно возрастает на всей области определения => уравнение имеет 1 решение.

$t^6+2021^2t^2-4042t^4-2022=0$

Заменим: $t^2=s$.

$s^3-4042s^2+2021^2s-2022=0$.

При $s=2022$

$2022^3-4042\cdot2022^2+2021^2\cdot2022-2022=0$

$2022^2-4042\cdot2022+2021^2=1$

$(2022-2021)^2=1$

$1=1$

равенство выполняется => $s=2022$.

Обратная замена: $t^2=2022$ => $t_1=\sqrt{2022}$, $t_2=-\sqrt{2022}$ – пост. к., т.к. $t_2^2-2021>0$.

$x^3=\sqrt{2022}$ => $x=2022^{\frac{1}{6}}$.

Ответ: $2022^{\frac{1}{6}}$.

(4) один корень найден подбором. Решений обычно, по-сути, нет!