



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 85358 Класс 11

Вариант 24 Дата 19.02.2022



Площадка написания

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
5	8	1	5	5	3	0			

Оценка цифрами

Оценка прописью

Подпись

6	8	9	шестьдесят восемь девять							[Signature]	
---	---	---	--------------------------	--	--	--	--	--	--	-------------	--

№3

Дано:

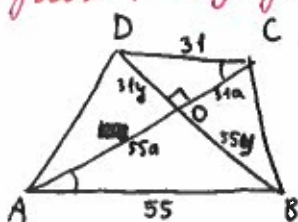
ABCD - трапеция

$AB \parallel CD$

$AB = 55, DC = 31$

$AC \perp BD$

Найти: $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$



1) Пусть $AC \cap BD = O$.

2) Рассмотрим $\triangle OAB$ и $\triangle OCD$.

$\angle OAB = \angle OCD$ (накрест лежащие $\angle$ при $DC \parallel AB$, AC - секущая)
 $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ (т.к. $DB \perp AC$ по усл.)
 $\Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OCD$ по двум $\angle$.

Тогда $\frac{DO}{OB} = \frac{CO}{OA} = \frac{DC}{AB} = \frac{31}{55}$. Пусть $DO = 31y$, тогда $OB = 55y$, $y > 0$.
 Пусть $CO = 31a$, тогда $OA = 55a$, $a > 0$.

3) Рассмотрим $\triangle COD$ - прямоугольный (т.к. $\angle COD = 90^\circ$), по π Пифагора

$$CD^2 = DO^2 + CO^2$$

$$31^2 = 31^2 y^2 + 31^2 a^2 \Rightarrow y^2 + a^2 = 1.$$

$$4) \vec{AD} \cdot \vec{BC} = (\vec{AO} + \vec{OD}) \cdot (\vec{BO} + \vec{OC}) = \vec{AO} \cdot \vec{BO} + \vec{AO} \cdot \vec{OC} + \vec{OD} \cdot \vec{BO} + \vec{OD} \cdot \vec{OC} =$$

$$= AO \cdot BO \cdot \cos 90^\circ + AO \cdot OC \cdot \cos 90^\circ + OD \cdot BO \cdot \cos 90^\circ + OD \cdot OC \cdot \cos 90^\circ = 0 + AO \cdot OC \cdot 1 + OD \cdot BO \cdot 1 + 0 =$$

$$= 55a \cdot 31a + 31y \cdot 55y = 55 \cdot 31 (a^2 + y^2) = 55 \cdot 31 \cdot 1 = 1705$$

Ответ: 1705. ✓

15



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 85358 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022



Площадка написания

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

№2

$$f(x) + (0,5+x)f(1-x) = 1$$

Пусть $x \rightarrow (1-x)$, тогда ур-ние примет вид $f(1-x) + (0,5+1-x)f(1-(1-x)) = 1$
 $f(1-x) + (\frac{3}{2}-x)f(x) = 1$ ✓

$$\begin{cases} -f(1-x)(0,5+x) = f(x) - 1 \\ f(1-x) = 1 - (\frac{3}{2}-x)f(x) \end{cases} \quad | \cdot (0,5+x), x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & \text{при } x = -\frac{1}{2} \quad f(-\frac{1}{2}) + 0 = 1 \\ & f(-\frac{1}{2}) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -f(1-x)(0,5+x) = f(x) - 1 \\ f(1-x)(0,5+x) = 0,5+x + (x-\frac{3}{2})(\frac{1}{2}+x)f(x) \end{cases} \quad \textcircled{+}$$

$$0 = f(x) - \frac{1}{2} + x + f(x) \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}x + x^2 - \frac{3}{4} \right)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\right) = f(x) \left(1 - \frac{3}{4} - x + x^2\right)$$

$$x - \frac{1}{2} = f(x) \cdot \left(\frac{1}{4} - x + x^2\right) \quad | : \left(\frac{1}{4} - x + x^2\right), \left(\frac{1}{4} - x + x^2\right) \neq 0$$

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{x^2 - x + \frac{1}{4}}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x-2}{4x^2-4x+1} ; x \neq \pm \frac{1}{2} \\ f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ f(-\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$$

$$\text{если } x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$f(\frac{1}{2}) + 1 \cdot f(\frac{1}{2}) = 1, \text{ т.е.}$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

8

$$\text{Ответ: } \begin{cases} f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ f(-\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4x-2}{4x^2-4x+1}, \text{ если } x \neq \pm \frac{1}{2}$$

$x \neq -\frac{1}{2}?$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Площадка написания

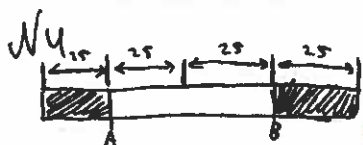
Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

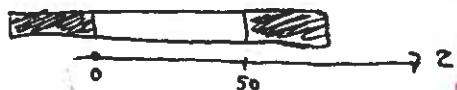
Шифр 85358 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022

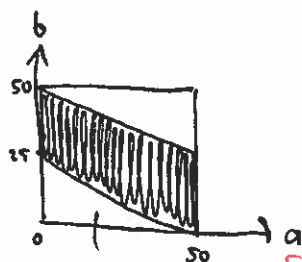


По условию ^{длины} каждой из трёх получившихся частей ≥ 25 см. ✓

Делаем ~~первый~~ разлом первую засечку на трубе — линия разлома. Она должна быть не ближе 25 см к краю трубы, т.е. с вероятностью $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ мы сделаем ^{подходящ.} ~~первый~~ разлом. Осталось сделать 2ой разлом, с вероятностью $\frac{1}{2}$ мы сделаем ^{правильно и его.} Осталось ~~сделать~~ условие*: расстояние между разломами ≥ 25 .



Введем систему координат. Пусть a — координата 1ого разлома, b — координата 2ого разлома $a, b \in [0, 50]$. $[0, 100]$



(т.е. если коорд. $z_1 = 0$, то нам подходит $z_2 \in [25, 50]$.
если коорд. $z_1 = 50$, то нам подходит $z_2 \in [0, 25]$,
аналогично для остальных z_1 и z_2).

не беру угловых значений
благодаря симметрии
Вероятность выполнения этого условия* = отношение

чёрной области к площади квадрата 50×50 . Это равно $\frac{50 \cdot 25 + 50 \cdot 25}{2} = \frac{1}{2}$
(область та, то нам подходит)

Итого: исходная вероятность $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125$.

Ответ: 0,125.

муч (✓) (5) (65)

(сделать) 5.
Вограничил под решение
ав-се в критерии правильности,
но не реализован в смысле
серьёзных решений!

Давыдов / Павлов
Стр. 3



$$(ab)^c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 85358 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022



Площадка написания

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

№1.

$$x^3 - 2022x^2 + \sqrt{2021} = 0$$

Пусть $x^3 = a$, тогда $a^3 - 2022a + \sqrt{2021} = 0$ (*)

Методом подбора устанавливаем первый корень $a = -\sqrt{2021}$

$$2021\sqrt{2021} - 2022\sqrt{2021} + \sqrt{2021} = 0, \text{ подходит!}$$

Тогда ур-ние примет вид:

$$(a - \sqrt{2021})(a^2 + \sqrt{2021}a - 1) = 0$$

Рассмотрим ур-ние $a^2 + \sqrt{2021}a - 1 = 0$

$$D = 2021 + 4 = 2025 = 45^2$$

$$a = \frac{-\sqrt{2021} \pm 45}{2}$$

Обратная замена!

$$\begin{cases} x^3 = \sqrt{2021} \\ x^3 = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2} \\ x^3 = \frac{-\sqrt{2021} - 45}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{2021} \\ x = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}} \\ x = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021} - 45}{2}} \end{cases}$$

← ответ

5



N6

Дано:

сфера ω
с центром в т. O.

$R = 6$ (радиус сферы)

$ABC A_1 B_1 C_1$ -
правильная призма.

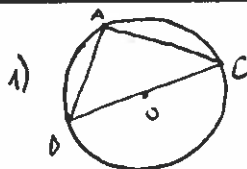
$ABCA_1 B_1 C_1$ вписана в ω .

ABC - основание.

CD - диаметр сферы ω .

$AD = 4\sqrt{6}$.

$V = ?$



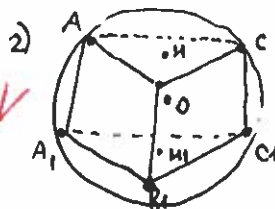
Рассмотрим сечение сферы ω
плоскостью (ADC) .

Данное
сечение - окружность.

$O \in DC$ т.к. O - центр сферы, CD - её диаметр.

$\angle DAC = 90^\circ$ (вписанный $\angle$, опирающийся на диаметр),

тогда по т. Пифагора $AC = \sqrt{DC^2 - DA^2} = \sqrt{(2R)^2 - DA^2} =$
 $= \sqrt{(2 \cdot 6)^2 - (4\sqrt{6})^2} = \sqrt{4^2(3^2 - 6)} = 4\sqrt{3}$ ✓



Пусть т. O проектируется в H
на плоскость (ABC) , в H_1 на $(A_1 B_1 C_1)$.

Рассмотрим треугольную пирамиду OABC.

ABC - правильн. $\Delta \Rightarrow OABC$ - правильн. Δ
 $OA = OC = OB$ (как радиусы сферы ω)
треугольн. пирамида.

Тогда O проектируется на (ABC) в центр правильн. ΔABC .

центр правильн. ΔABC совпадает
в центром его
описанной
окр-ти.

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R_0} = \frac{a^3}{4R_0}$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{a}{R_0} = \sqrt{3}$$

, т.к. $a = AC = 4\sqrt{3}$

$R_0 = 4$ (радиус описанной около ΔABC окр-ти)

Тогда

$$AH = R_0.$$

ΔAHO - прямоугол. ($OH \perp (ABC)$ } $OH \perp AH$, т.е. $\angle AHO = 90^\circ$), по т. Пифагора
 $AH \in (ABC)$

$$OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{R^2 - R_0^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
 ✓

Аналогично находим $OH_1 = 2\sqrt{5}$.

$$OH \perp (ABC)$$

$$OH_1 \perp (A_1 B_1 C_1)$$

$$(ABC) \parallel (A_1 B_1 C_1) \text{ по стр. правильн. } \Delta \text{ треугольн. призмы}$$

$$\Rightarrow O \in HH_1, \text{ т.е. } HH_1 = OH + OH_1 = 4\sqrt{5} - \text{высота призмы.}$$

$$3) S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$$
 ✓

$$V = S_{ABC} \cdot HH_1 = 12\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5} = 48\sqrt{15}$$

Ответ: $48\sqrt{15}$. ✓



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c = a(bc)$ $E=mc^2$ $H-C-H$

Площадка написания

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 85358 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022



N5

Компания:	Размерность	Двухмерность	Трёхмерность
Кол-во аккумуляторов:	a	b	$a+b$
Суммарная стоимость аккумуляторов (тыс руб):	$4m$	m	$5m$

$$\begin{aligned} a &\in \mathbb{N} \\ b &\in \mathbb{N} \\ m &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 16 \leq \frac{4m}{a} - \frac{m}{b} \leq 20 & | \cdot ab, a > 0, b > 0 \\ 42 \leq \frac{5m}{a+b} \leq 60 & | \cdot (a+b), a+b > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 16ab \leq 4mb - ma \leq 20ab \\ 42(a+b) \leq 5m \leq 60(a+b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16ab \leq 4mb - ma & (1) \\ 4mb - ma \leq 20ab & (2) \\ 42(a+b) \leq 5m & (3) \\ 5m \leq 60(a+b) & (4) \end{cases}$$

Выразим a из (1) и (4)
 b из (2) и (3)

$$\begin{cases} a \leq \frac{4mb}{16b+m} \\ a \geq \frac{5m-60b}{60} \\ b \geq \frac{42a-m}{20a-4m} \\ b \leq \frac{5m-42a}{42} \end{cases}$$

дополним
всё на
 $12(16b+m)$,
 $b \in \mathbb{N}$,
 $m > 0$

$$\text{Отсюда} \quad \begin{cases} \frac{4mb}{16b+m} \geq \frac{5m-60b}{60} \\ \frac{5m-42a}{42} \geq \frac{ma}{4m-20a} \end{cases} \quad \begin{cases} 4mb \cdot 12 \geq (m-12b) \cdot (16b+m) & (*) \\ \frac{5m-42a}{42} + \frac{ma}{20-4m} \geq 0 & (**) \end{cases}$$

Рассмотрим (*):

$$48mb \geq 16mb + m^2 - 12 \cdot 16b^2 - 12mb$$

$$m^2 - 12 \cdot 16b^2 - 44mb \leq 0 \quad | : b^2, b \neq 0.$$

$$\left(\frac{m}{b}\right)^2 - 44 \cdot \frac{m}{b} - 12 \cdot 16 \leq 0.$$

$$\left(\frac{m}{b} + 4\right) \left(\frac{m}{b} - 48\right) \leq 0$$

$$\frac{m}{b} \in [-4, 48] \quad \text{т.к. } \frac{m}{b} > 0 \Rightarrow \frac{m}{b} \in (0, 48].$$

Тогда $m \in (0, 48b]$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 85358 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022



№5 (продолжи) Рассмотрим (**):

$$\frac{5m - 42a}{21} + \frac{ma}{10 - 2m} \geq 0$$

$$\frac{(5m - 42a)(10 - 2m) + 21ma}{21(10 - 2m)} \geq 0 \quad | \cdot 42$$

$$\frac{50m - 10m^2 - 420a + 84m + 21ma}{5 - m} \geq 0$$