ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2754

Класс 11 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11.02.17.

Площадка написания Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	5	0	5	10	10	5	15	5	20	79	семьдесят девять	

0 74 Семьдесят четыре (Апелляция)

№1. $(x-1)(x-3)(x-5)=x(x^2-9)$

$(x-1)(x-3)(x-5)=x(x-3)(x+3)$

$(x-3)((x-1)(x-5)-(x+3)x)=0$

$\left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ (x-1)(x-5)-x(x+3)=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^2-x-5x+5-x^2-3x=0 \end{array}\right.$

$9x=5$

$x=\frac{5}{9}$

Ответ: 5; 5/9

№2. $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$

ОДЗ:
$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 3x+1\geq 0 \end{cases}$ $x\geq 1$

$3x+1+x-1+2\sqrt{(x-1)(3x+1)}=4$

$2\sqrt{(x-1)(3x+1)}=4-4x$

$\sqrt{(x-1)(3x+1)}=2-2x$

$(x-1)(3x+1)=4-8x+4x^2$

$3x^2+x-3x-1=4-8x+4x^2$

$x^2-6x+5=0$

$D=36-20=16$

$x=\frac{6\pm 4}{2}$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$

При $x=1$

$\sqrt{0}+\sqrt{4}=2$ $\Rightarrow x=1$

При $x=5$

$\sqrt{4}+\sqrt{16}\neq 2$

Ответ: 1

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2754

№3. $\dfrac{2}{x+1} \geq \dfrac{3}{x+2}$

ОДЗ:

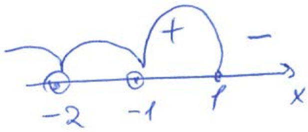
$\left[\begin{array}{l} x+1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{array}\right.$

$\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{3}{x+2}$

$2(x+2) = 3(x+1)$

$2x+4 = 3x+3$

$x = 1$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 1]$

№4. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \dfrac{11}{12}$ ОДЗ: $x > 0$

$\log_3 x + \dfrac{1}{2}\log_3 x + \dfrac{1}{3}\log_3 x = \dfrac{11}{12}$

$\log_3 (x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}) = \dfrac{11}{12}$

$x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{11}{12}}$

$x^{\frac{11}{6}} = 3^{\frac{11}{12}}$

$x^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{12}}$

$x = \pm\sqrt{3}$ $\quad -\sqrt{3} < 0$

$x = \sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}$.

№5. $8\cdot 4^x+1\le 6\cdot 2^x$

$8\cdot 2^{2x}+1=6\cdot 2^x$

Замена: $y=2^x>0$

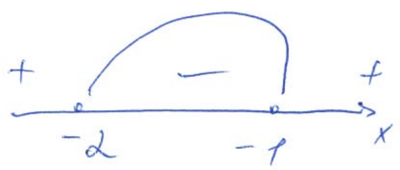
$8y^2+1=6y$

$8y^2-6y+1=0$

$D: 36-32=4$

$y=\dfrac{6\pm 2}{16}$ $\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ $2^x=\frac{1}{4}$ $2^x=\frac{1}{2}$

$x=-2$ $x=-1$



Ответ: $[-2;-1]$.

№6. Пусть a - кол-во ангорских кошек, тогда

сиамских: $2a$

персидских: $1,5\cdot 2a=3a$

сибирских: $3a-13$

Зная, что всего 77 кошек, составим уравнение:

$a+2a+3a+3a-13=77$

$9a=90$

$a=10$

Проверка: $10+20+30+30-13=90-13=77$

Ответ: ангорских - 10
сибирских - 17
персидских - 30
сиамских - 20

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2754

N7. I Если $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$, $\log(2^x+1)$ ← арифметич. прогрессия, то

$$\lg(2^x-1)=\frac{\lg 2+\lg(2^x+1)}{2}$$

ОДЗ: $\begin{cases}2^x-1>0\\2^x+1>0\end{cases}$

$2^x>1$

$x>0$

$(2^x-1)^2=2\cdot(2^x+1)$

Замена: $y=2^x>0$

$(y-1)^2=2\cdot(y+1)$

$y^2-2y+1=2y+2$

~~$y^2-6y+2=0$~~

~~$D: 36-8=28$~~

$y^2-4y-1=0$

$D: 16+4=20$

$y=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}$

$\left[\begin{array}{l}y=2+\sqrt5\\y=2-\sqrt5\end{array}\right.$ ← не подходит

$2^x=2+\sqrt5$

$x=\log_2(2+\sqrt5)$

II Если $\lg(2^x-1)$, $\lg 2$, $\lg(2^x+1)$ ← арифм. прогресс, то

$$\lg 2=\frac{\lg(2^x-1)+\lg(2^x+1)}{2}$$

$4=(2^x-1)(2^x+1)$

$4=4^x-1$

$4^x=5$

$x=\log_4 5$

это при $x>1$, ~~можно~~ $2^x-1<2$

$\lg(2^x-1)$

$2^x<3$

$x<\log_2 3$

Ответ: $\log_2(2+\sqrt5)$; $\log_4 5$

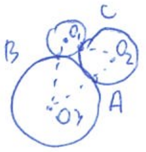
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2754

№8.



O_3O_2 – самый большой отрезок, так как O_3A – радиус наибольш. окр-ти

O_2A – радиус средней окр-ти

$$O_3O_2 = O_3A + AO_2$$

$$O_3A = O_3B \ (R_3)$$

$$O_2A = O_2C \ (R_2)$$

$$O_1C = O_1B \ (R_1)$$

$\angle O_3O_1O_2 = 90^\circ$

$\Rightarrow (O_3O_2)^2 = (O_3O_1)^2 + (O_2O_1)^2$ (по теореме Пифагора)

Пусть $x = R_1$

Знаем, что $O_2O_3 = 6+4=10$

$O_3O_1 = x+6$

$O_2O_1 = x+4$

Составим уравнение:

$$10^2 = (x+6)^2 + (x+4)^2$$

$$100 = x^2+12x+36+x^2+8x+16$$

$$2x^2+20x-48=0$$

$$x^2+10x-24=0$$

$$D = 100+80+16=196=14^2$$

$$x = \frac{-10 \pm 14}{2}$$ $\left[\begin{array}{l} x = -12 \text{ не уд. условию} \\ x = 2 \end{array}\right.$

$x=2$ При проверке получаем:

$$(6+4)^2 = (4+2)^2 + (6+2)^2$$

$$100 = 36+64$$

$$П.Ч. = Л.Ч.$$

Ответ: 2 см

№10. $A^3 = \sqrt{5}+2 - \sqrt{5}+2 + 3\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^2\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right) = 4+3(\ldots)$

$A^3+3A = 4+3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^2\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^2\sqrt{\sqrt{5}-2} + 3\left(\sqrt{\sqrt{5}+2} - \sqrt{\sqrt{5}-2}\right) = {}^{+4}3\left((\sqrt{5}-2)^2+1\right) - \left(3\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)^2+1$

Ответ: 4.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2754

№9. $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ tg\,x+tg\,y=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$ $y=\frac{\pi}{4}-x$ ОДЗ: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$tg\,x+tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$

$tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\sin x\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)}=$

$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{\sin x(\cos x+\sin x)+\cos x(\cos x-\sin x)}{\cos x(\cos x+\sin x)}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

$=\frac{\sin x\cos x+\overbrace{\sin^2x+\cos^2x}^{=1}-\sin x\cos x}{\cos^2x+\sin x\cos x}=\frac{1}{\cos^2x+\sin x\cos x}$

$(\cos^2x+\sin x\cos x)(\sqrt{3}(\sqrt{3}-2))=1$

$\cancel{\sqrt{3}\cos^2x}$ $(\cos^2x+\sin x\cos x)(3-2\sqrt{3})=1$

$3\cos^2x+3\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=1$

$\cos^2x=1-\sin^2x$

$\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$

$(\cos^2x+\sin x\cos x)=\cancel{(\cos x+\sin x)^2}$

$=1-\sin^2x+\frac{\sin 2x}{2}$

$\cos x(\sin x+\cos x)$

$tg\,x+tg\,y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin x\cos y+\sin y\cos x}{\cos x\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$

$tg\,x+tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cancel{\cos x}\cos\frac{\pi}{4}+2\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

$\cos x\cos y=\cos(y+x)+2\sin x\sin y$

$\neq$?

$\shortparallel$

$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

(см. на следующей странице)

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2754

№9 (продолжение)

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)$$

$$2\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3})(\sqrt{3}-\cancel{\sqrt{2}})}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin x\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\sin x\cos\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\left(\cos x-\sin x\right)$$

$$\sin x\left(\cos x-\sin x\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)}-\frac{1}{2}=\frac{1-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)}$$

$$\sin x\cos x-\sin^2 x=\frac{1+\sqrt{3}\cdot 2-3}{6-4\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-2}{6-4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{3-2\sqrt{3}}$$

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$\sqrt{1-\sin^2 x}-\sin^2 x=\frac{\sqrt{3}-1}{3-2\sqrt{3}} \qquad \sin^2 x=y \qquad \sqrt{1-y}=\frac{\sqrt{3}-1}{3-2\sqrt{3}}+y$$

$$1-y=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3-2\sqrt{3}}\right)^2+y^2+2y\frac{\sqrt{3}-1}{3-2\sqrt{3}}$$

$$y^2+\frac{\cancel{2\sqrt{3}}-2+3-\cancel{2\sqrt{3}}}{3-2\sqrt{3}}y+\frac{4-2\sqrt{3}}{21-12\sqrt{3}}$$

$$y^2+\frac{1}{3-2\sqrt{3}}y+\frac{-17-14\sqrt{3}}{21-12\sqrt{3}}=0$$

$$D=\frac{1}{9+12-12\sqrt{3}}+\frac{4(17+14\sqrt{3})}{21-12\sqrt{3}}=\frac{69+5}{21-12}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x+\sin x\cos x}=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}=\cos^2 x+\sin x\cos x \quad \Big| :\cos^2 x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}=1+\operatorname{tg}x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}^2 x+1 \qquad \left(\operatorname{tg}^2 x+1\right)\frac{1}{3-2\sqrt{3}}=1+\operatorname{tg}x$$

$$\operatorname{tg}x=y$$

$$y^2+1=(1+y)(3-2\sqrt{3})$$

$$y^2+1=3-2\sqrt{3}+3y-2\sqrt{3}y$$

$$\boxed{\begin{aligned}&y^2-(3-2\sqrt{3})y-(2-2\sqrt{3})=\\&D=(3-2\sqrt{3})^2+4(2-2\sqrt{3})\\&=9-12\sqrt{3}+12+8-8\sqrt{3}=\\&=29-20\sqrt{3}\\&y=\frac{3-2\sqrt{3}\mp(29-20\sqrt{3})}{2}=32\end{aligned}}$$

$$\operatorname{tg}x=16-11\sqrt{3} \qquad +\pi k, k\in\mathbb{Z}$$
$$\operatorname{tg}x=-13+9\sqrt{3}$$

Ответ: $\operatorname{arctg}(16-11\sqrt{3})$; $\operatorname{arctg}(9\sqrt{3}-13)$