ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

**Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!**

**ШИФР** 18826

**Класс** 11 **Вариант** 11 **Дата Олимпиады** 10.02.2018

**Площадка написания** Санкт-Петербургский Горный университет

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ Цифрой | Σ Прописью | Подпись |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | 4 | 4 | – | 8 | 8 | – | 12 | 15 | 16 | – | 67 | шестьдесят семь | [illegible] |

№1.

$$A=\frac{2^{-2}+2018^0}{(0,5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4,75=\frac{0,25+1}{4-5\cdot0,25+\frac{9}{4}}+4,75=$$

$$=\frac{1,25}{4-1,25+2,25}+4,75=\frac{1,25}{5}+4,75=0,25+4,75=5$$

$0,6A=0,6\cdot5=3.$ +4б

Ответ: 3.

№2.

Нов. $\frac{1}{5}k$

Роснефть $\frac{1}{2}k$

Лукойл $\frac{1}{10}k$

Газпром – $\frac{3k}{20}$, т.к. 30% от

Из условие:

$$\frac{1}{5}k+\frac{1}{10}k+\frac{3k}{20}+8=\frac{1}{2}k$$

$$\frac{2k+4k+3k}{20}+8=\frac{10k}{20}$$

$$\frac{9k}{20}+8=\frac{10k}{20}\Rightarrow k=160.$$ +4б

1) Новаяек – 160 : 5 = 32
2) Роснефть – 80
3) Лукойл – 16

Ответ: Новаяек – 32 млрд $м^3$
Роснефть – 80 млрд $м^3$
Лукойл – 16 млрд $м^3$
Газпром 24 млрд $м^3$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

**Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!**

**ШИФР** 18826

№4.

$\sqrt{x^3-3x+1}-x=-1$ | ОДЗ: $\begin{cases} x\geq 1 \\ x^3-3x+1\geq 0. \end{cases}$

$\sqrt{x^3-3x+1}=x-1$

$x^3-3x+1=x^2-2x+1$

$x^3-x^2-x=0$

$x(x^2-x-1)=0$

1) $x=0$ – не удовлетворяет ОДЗ

2) $x^2-x-1=0$

$D=1+4=5$

$x_1=\frac{1-\sqrt5}{2}$

$x_2=\frac{1+\sqrt5}{2}$

Проверка: 1) $\frac{1-\sqrt5}{2}\geq 1$

$1-\sqrt5\geq 2$

$\sqrt5\leq 1$

$5\leq 1$ – неверно

2) $\frac{1+\sqrt5}{2}\geq 1$

$\sqrt5\geq 1$

$5\geq 1$ – верно.

Ответ: $x=\frac{1+\sqrt5}{2}$.

+8б

№5.

1) $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1$

$\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

2) $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3=1$

$\sin^6\alpha+3\sin^4\alpha\cos^2\alpha+3\cos^4\alpha\sin^2\alpha+\cos^6\alpha=1$.

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

3) Подставим в выражение из условия:

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18826

№5 (продолжение).

$$\frac{\cancel{1}-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cancel{-1}}{\cancel{1}-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cancel{-1}}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

+8б

№7.

$$\sqrt{8x-x^2-7}-\sqrt{11-x}\geq\sqrt{9x-x^2-18}$$

I ОДЗ:
$$\begin{cases}-x^2+8x-7\geq0\\ x\leq11\\ -x^2+9x-18\geq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-8x+7\leq0\\ x\leq11\\ x^2-9x+18\leq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1)(x-7)\leq0\\ x\leq11\\ (x-3)(x-6)\leq0\end{cases}$$

$1\quad 3\quad 6\quad 7\quad 11 \quad x$ $\Rightarrow 3\leq x\leq 6.$

II. Возведение обоих частей в квадрат, т.к. положительны.

$$8x-x^2-7-2\sqrt{(11-x)(8x-x^2-7)}+11-x\geq 9x-x^2-18$$

$$7x-7+11-2\sqrt{(11-x)(8x-x^2-7)}-9x+18\geq0$$

$$\cancel{-2(x}\ 2(11-x)\geq 2\sqrt{(11-x)(8x-x^2-7)}$$

$$(11-x)^2\geq(11-x)(8x-x^2-7)$$

$$(11-x)(11-x-8x+x^2+7)\geq0$$

$$(11-x)(x^2-9x+18)\geq0$$

$$(11-x)(x-3)(x-6)\geq0$$

$+\quad 3\quad -\quad 6\quad +\quad 11\quad -\quad x$

Ответ: 3; 6.

+12б

№8.

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \quad /\cdot \sin x) \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \quad /\cdot \cos x) \end{cases}$$

ОДЗ: $\sin x \neq 0$
$\cos x \neq 0$

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \cdot \sin y \quad (1) \\ \cos^2 x - 1 = \cos y \cos x \end{cases} +$$

$\cos^2 x + \sin^2 x - 1 - 1 = \sin x \sin y + \cos x \cos y$

$-1 = \cos(x-y)$

$\Rightarrow \quad x - y = \pm \pi$

$y = x \mp \pi$.

Подставим в ~~первое~~ (1):

$\sin^2 x - 1 = \sin x \cdot \sin(x \mp \pi)$

$\sin^2 x - 1 = \sin x \cdot (\sin x \cos \pi \mp \cos x \sin \pi)$

$\sin^2 x - 1 = \sin x(-\sin x - 0)$

$\sin^2 x - 1 = -\sin^2 x$

$2\sin^2 x = 1$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z$.

Ответ: $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z$.

$y = ?$

$\pm 15б$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

**ШИФР** 18826.

№ 9.

Рассмотрим

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k^2-2k+1}+\sqrt[3]{k^2-k}+\sqrt[3]{k^2}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{k-1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{k-1}\right)\sqrt[3]{k}+\left(\sqrt[3]{k}\right)^2} = \frac{\sqrt[3]{k-1}-\sqrt[3]{k}}{\left(\sqrt[3]{k-1}\right)^3-\sqrt[3]{k}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{k-1}-\sqrt[3]{k}}{-1} = \sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}.$$

Рассмотрим при $k=3$:

$$1-0+\sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{3}$$

Т.е. $k$ должен быть число в кубе, что выражение было рациональным.

$13^3 = 2197$

$12^3 = 1728$ $\Rightarrow k_{min} = 2197.$

Ответ: 2197.

+16 б