ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 21674

Класс 11 **Вариант** 11 **Дата Олимпиады** _____

Площадка написания Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	4	8	8	12	8	16	–	0	64	шестьдесят четыре	~~отлично~~

задача N=1

найти 60% от A,

$$A=\frac{2^{-2}+7018^0}{(0,5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}}+4,75=\frac{4+1}{4+5\cdot\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}+\frac{19}{4}=$$

$$=\frac{\left(\frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{16-5+9}{4}\right)}+\frac{19}{4}=\frac{5}{20}+\frac{19}{4}=5.$$

1.0 60% от A это $0,6\cdot 5=3$.

+4б

Ответ: 3.

Задача N°2.

I компания добыла $\frac{1}{5}X$ млрд куб. м. газа, тогда Роснефть добыла $\frac{1}{2}X$, а Лукойл $\frac{1}{10}X$.

„Газпром нефть" добывает 30% от объема Роснефти =>

=> Газпромнефть – $\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}X$ млрд куб. м. $=\frac{3}{20}X$

используя последнее условие, получим

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{10}x + \frac{3}{20}x = \frac{1}{2}x - 8 \quad |\cdot$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x + 2x + 3x = 10x - 8 \cdot 20 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 160 \quad \text{(млрд. куб.м)}$$

Т.О. доходы компаний составили

Роснефть – $\frac{1}{2}x$ – 80 млрд куб.м.

Газпромнефть – $\frac{3}{20}x$ = 24 млрд куб.м

Лукойл $\frac{1}{10}x$ – 16 млрд куб.м

Новатэк $\frac{1}{5}x$ – 32 млрд куб.м

+4б

Ответ: Роснефть 80, Газпромнефть 24,
Лукойл 16, Новатэк 32 (млрд. куб.м).

Задача №3

Роща имеет радиус 758 м.

расстояние между любыми 2-мя деревьями больше 12 м.

Т.О. для каждого дерева, в круг с центром в нем радиусом 12 м нет других деревьев. (12)

Это условие не выполняется, т.к. в 3 018 таких деревьях

~~все деревья рощи занимают площадь~~

проведём круг на каждое дерево окружность радиусом 6 м.

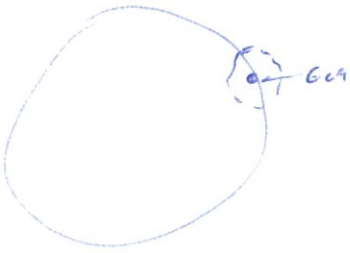
Тогда т.е. расстояние между людьми деревьями > 12 м, то тогда окружности не пересекутся

посмотрим сколько людей займут эти окр-ти.

$2018 \cdot \pi r^2$, где $r = 6$.

это должно быть меньше площади всей рощи, если взять её радиус больше на 6м (т.к. деревья могут быть на границе)

это равно πR^2, где $R = 252 + 6 = 264$ м.



Просто (!), что

$2018 \cdot \pi \cdot 36 > \pi \cdot 264 \cdot 264 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2018 \cdot 36 > 264 \cdot 264 \Leftrightarrow 2018 \cdot 9 > 132 \cdot 132 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2018 > 44 \cdot 44$. $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{r} 44 \\ \times\ 44 \\ \hline 176 \\ 176 \\ \hline 1936 \end{array}$ $\Leftrightarrow$ $2018 > 1936$

и

ч.т.

т.о. 2018 деревьев займут больше площади рощи $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ окр-ти пересекаются $\Rightarrow$ расст < 12 м. ?!

т.о. деревьев не больше, чем 2018.

+4б

ч.т.д.

Задача N: 4

Р.У.

$\sqrt{x^3-3x+1}-x=-1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3-3x+1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x+1=(x-1)^2 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x=x^2-2x \\ x\geq 1 \end{cases} \overset{x\geq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2-3=x-2 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-1=0 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x\geq 1 \end{cases}$ $1-\sqrt{5}<0 \Leftrightarrow$ ~~$1+\sqrt{5}>2$~~ (*) $\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(*) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\geq 1 \Leftrightarrow 1+\sqrt{5}\geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{5}\geq 1 \Leftrightarrow 5>1$ – ист.

Ответ: $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

+85

Задача N: 5

Показать тождество

$\frac{\sin^4\beta+\cos^4\beta-1}{\sin^6\beta+\cos^6\beta-1}=\frac{2}{3} \overset{a\sin\beta}{\underset{b\cos\beta}{\Leftrightarrow}} \frac{(\sin^2\beta+\cos^2\beta)^2-2\sin^2\beta\cos^2\beta-1}{a^3+b^3-1}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\overset{\sin^2\beta+\cos^2\beta=1}{\Leftrightarrow} \frac{-2\sin^2\beta\cos^2\beta}{(a+b)(a^2-ab+b^2)-1}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow -3\sin^2\beta\cos^2\beta=2(\sin^2\beta+\cos^2\beta)(\sin^4\beta-\sin^2\beta\cos^2\beta+\cos^4\beta)-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta=2(\sin^4\beta+\cos^4\beta-\sin^2\beta\cos^2\beta)-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1=\sin^4\beta+\cos^4\beta+2\sin^2\beta\cos^2\beta \Leftrightarrow 1=(\sin^2\beta+\cos^2\beta)^2 \Leftrightarrow 1=1$ – ист.

Т.О. тождество верно при всех β.

+85

Ч. Т. Д.

Задача №6

Для того, чтобы посчитать, сколько километров пролетела оса достаточно понять, какое время она летала (зная, что её скорость не менялась)

Разница между путешественниками 10км, первый идет 3км/ч второй 5 км/ч, значит их скорость сближения 2 км/ч.

Т.О. $t_{встр} = \frac{S}{V} = \frac{10}{2} = 5$ ч. Т.О. путешественники встретятся через 5 часов. А значит и оса будет летать 5 часов. ее скорость 12 км/ч.

Тогда она пролетит расстояние $V \cdot t = 12 \cdot 5 = 60$ км.
(12 км/ч · 5ч = 60км)

+ 12б

Ответ: оса пролетела 60 км

Задача №7

Р.Н.

$$\sqrt{8x - x^2 - 7} - \sqrt{11 - x} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8x - x^2 - 7} \geq \sqrt{9x - x^2 - 18} + \sqrt{11 - x} \Leftrightarrow$$ все подкоренные больше 0

$$8x - x^2 - 7 \geq 9x - x^2 - 18 + 11 - x + 2\sqrt{9x - x^2 - 18}\sqrt{11 - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{9x - x^2 - 18}\sqrt{11 - x} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{9x - x^2 - 18}\sqrt{11 - x} \leq 0. \Leftrightarrow$$

сами корни из этих чисел – неотрицательны, значит

неравенство выполняется только когда левая часть равна 0.

$\Leftrightarrow \sqrt{9x-x^2-18}\sqrt{11-x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11-x=0 \\ 9x-x^2-18=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x^2-9x+18=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x=\frac{9\pm 3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x=3 \\ x=6 \end{array}\right.$

Ответ: {11; 3; 6}

±8б

Задача №8 Р.С.Х.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cdot \cos y \end{cases}$

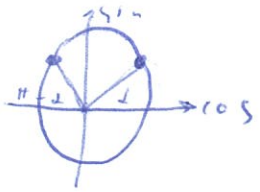
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \sin x \sin y \\ \sin^2 x = \cos x \cdot \cos y \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin y} \\ \frac{\cancel{\cos}\sin x}{\cos x} = \frac{\cos y}{\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow$

(*) $\sin y \neq 0$. т.к. если $\sin y = 0$, то $\cos^2 x = 0$, но по ОДЗ $\cos x \neq 0$.

аналогично $\cos y \neq 0$

$\Leftrightarrow$ (1) $\frac{\cos x}{\sin y} = \frac{\cos y}{\sin x} \Leftrightarrow \cos x \cdot \cancel{\cos}\sin x \cdot 2 = 2 \cdot \cos y \cdot \sin y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(2y) \Leftrightarrow$



I

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 2y + 2\pi k \\ 2x = \pi - 2y + 2\pi k \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + \pi k \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

II

I $x = y + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = \sin y \quad (1) \\ \sin x = -\sin y \quad (2) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = \cos y \quad (3) \\ \cos x = -\cos y \quad (4) \end{array}\right. \end{cases}$

вспомним про систему

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin y} \Rightarrow$



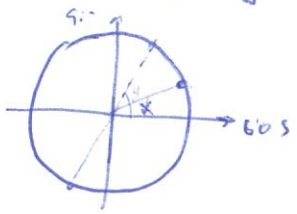
(3) $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \cos x \\ \sin x = -\cos x \end{array}\right.$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sin x = -\sin y$, тогда $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{-\sin x} \Rightarrow -\sin^2 x = \cos^2 x$ – неверно только в 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ такого не может быть.

II $x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - y + \pi k$ значит $\left[\begin{array}{l} \cos x = \sin y \quad (1) \\ \cos x = -\sin y \quad (2) \end{array}\right.$



1) $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin y} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin y} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что все варианты переписываются в одно выражение $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

тогда из I $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ x = y + \pi n \end{cases}, k, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - \pi n \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi(k-2n)}{2}$

посмотрим на исходное выражение.

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

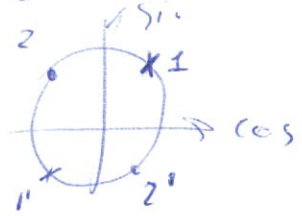
т.к. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тогда

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

тогда $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

для косинусов выполнено то же самое.

т.о. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ V = - \end{cases}$



$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

точки различны на π

т.о. Ответ: ~~$\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$~~

$\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} ; \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi n}{2} \mid V, n \in \mathbb{Z} \right\}$ +16б

Задача №10

?x $\forall a \in (1;3)$ выполнено.

$(a-2)x^2 + (13a-27)x + 33 - 13a > 0$?

это квадратное уравнение относительно x

при $a < 2$ → ветви вверх.

посчитаем D. $D = (13a-27)^2 - 4(a-2)(33-13a)$

покажем, что для допустимых a $D > 0$.

$D = 169a^2 + 27 \cdot 27 - 13 \cdot a \cdot 27 \cdot 2 - 8(66 - 16a - 33a + 13a^2) =$

$= 169a^2 + 729 - 26 \cdot 27a - 366 + 8 \cdot 49a - 8 \cdot 13 \cdot a^2 =$

$= 65a^2 - 270a + 701 = 0$

кв. ур-е относительно a,

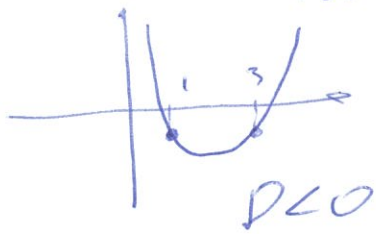
$f(a) = 65a^2 - 270a + 701$

$f(1) = 65 - 270 + 701 < 0$

~~$f(2) = 65 \cdot 4 - 270 \cdot 4$~~

$f(3) = 65 \cdot 9 - 270 \cdot 3 + 701 = 786 - 810 < 0$

?



т.о. $\forall a \in (1;3)$ $f(a) < 0$. Т.о реш. нет.

$D < 0 \Rightarrow$ корней нет.

при $a = 2$ $\quad -x + 33 - 76 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 47$.

при $a \neq 2$ ветви параболы вниз.

но как мы уже посчитали ранее $D < 0$ при всех допуст. a.

значит пересечения с осью нет.

~~при $x = 0$~~ значит весь график лежит выше оси

т.о решений нет.

(–)