

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$


ШИФР 11190

 Класс 9 Вариант 3 Дата Олимпиады 11.02.2017

 Площадка написания Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	15	0	80	восемьдесят	<i>[Signature]</i>

21) Введём обозначения:

 $S = 50 \text{ км}$ — расстояние между селом и городом

 v — скорость велосипедиста

 $v_2 = 2,5v$ — скорость мотоциклиста

 $t_1 = 1 \text{ час } 30 \text{ мин} = 1,5 \text{ ч}$ — время, через которое выехал мотоциклист

 $t_2 = 1 \text{ ч}$ — время, начавшего обгон мотоциклиста

 $\frac{S}{v}$ — время, затраченное велосипедистом на поездку

 $\frac{S}{v_2} = \frac{S}{2,5v}$ — время, затраченное мотоциклистом на поездку

 $\frac{S}{v} = \frac{S}{2,5v} + t_1 + t_2$ (т.к. под "догнал" время велосипедиста, мотоциклист выехал раньше, чем выехал на t_1 и выехал раньше на t_2)

Подставим числовые значения:

$$\frac{50}{v} = \frac{50}{2,5v} + 1,5 + 1$$

$$\frac{50}{v} = \frac{20}{v} + \frac{5}{2} \quad / \cdot 2v$$

$$100 = 40 + 5v$$

$$5v = 60$$

$$v = 12$$

 12 км/ч — скорость велосипедиста

 $v_2 = 2,5v = 2,5 \cdot 12 = 30 \text{ км/ч}$ — скорость мотоциклиста

 Ответ: 30 км/ч

 80 восемьдесят
[Signature]
(АПЕЛЛЯЦИЯ)

$$t = \frac{S}{v}$$



W4

$$y = 2x + b \quad (1)$$

$$y = x^2 + 4x + b \quad (2)$$

✗ обнулю (·) по оси ординат:

$$2x + b = x^2 + 4x + b$$

$$x^2 + 2x + (b - b) = 0$$

$$D = 4 - 24 + 4b$$

кв. ур-ние имеет 1 корень $\Rightarrow$ и график (1) с графиком (2) будет иметь одну точку пересечения

тогда, когда $D = 0$

$$4b - 20 = 0$$

$$4b = 20$$

$$b = 5$$

Ответ: $b = 5$

W2 $7t + 5u + 9x + 11y - 6z = ?$

$$t + u + 2x + 3y - z = 4 \quad / \cdot 4$$

$$4t + 4u + 8x + 12y - 4z = 16$$

$$-3t - u - x + y + 2z = -3 \quad / \cdot (-1)$$

$$3t + u + x - y - 2z = 3$$

сложим эти два выражения

$$7t + 5u + 9x + 11y - 6z = 19$$

это выражение совпадает с искомым, которое и требовалось найти

Ответ: 19



$$\begin{aligned}
 & \textcircled{3} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \sqrt{2+\sqrt{3}} = \\
 & = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2-\sqrt{3}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2+\sqrt{3}} = \\
 & = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2-\sqrt{3}} + (\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \\
 & = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{6-3\sqrt{3}} + \sqrt{6+3\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \\
 & = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{12-6\sqrt{3}} + \sqrt{12+6\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} = \\
 & = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(3+\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2} \quad \textcircled{*}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{*} \frac{\cancel{\sqrt{3}-1} + 3 - \cancel{\sqrt{3}} + 3 + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{3}+1}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{*}: \sqrt{3} > 1 & \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1; \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = |\sqrt{3}+1| = \sqrt{3}+1 \\
 3 > \sqrt{3} & \Rightarrow \sqrt{(3-\sqrt{3})^2} = |3-\sqrt{3}| = 3-\sqrt{3}; \sqrt{(3+\sqrt{3})^2} = |3+\sqrt{3}| = 3+\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

~~Ответ: 3~~

$$\textcircled{3} \frac{\sqrt{3}-1 + 3 - \sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} - \sqrt{3}-1}{2} = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: 2

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 11190

15) Пусть эти два числа образуют a и b

$$a + b = 221$$

$$\text{НОК}(a; b) = 612 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$$

$$\begin{array}{r|l} 612 & 2 \\ 306 & 2 \\ 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ \hline \end{array}$$

неч — нечётное число
чёт — чётное число

Т.к. НОК — чёт, а Σ чисел — неч $\Rightarrow$ одно из чисел чёт,
а другое — неч (потому что
НОК — произведение чисел,
т.к. каждое число имеет
в себе все делители данного
числа)

Пусть a — неч, b — чёт

$$b = 2^2 \cdot x$$

При этом и в a , и в b
всегда множители $3^2, 3^2, 17$ могут содержаться

$$\text{Пусть } b = 2^2 \cdot 17 = 4 \cdot 17 = 68$$

$$a = 17 \cdot 3^2 = 17 \cdot 9 = 153$$

$$153 + 68 = 221$$

Всё совпало $\Rightarrow$ числа подходят

Ответ: 68 и 153

16) Пусть $V = 8 \text{ л}$ — вместимость сосуда $x = 0,16 \text{ В} \Rightarrow y = 0,84 \text{ В}$

x — объём жидкости изначально

y — объём груза

z — объём смеси, который вытесним = объём выпл. груза

x_2 — объём жидкости конечный

y_2 — объём груза конечный

$$x_2 = 0,09 \text{ В} \Rightarrow y_2 = 0,91 \text{ В}$$

Понятно, что V сокращается, т.к. разлили и вытеснили одинаковое
кол-во смеси и груза $\Leftrightarrow$ одинаковые V

$$\begin{cases} y = 0,84 \text{ В} \\ y_2 = 0,91 \text{ В} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0,84 \text{ В} \\ y + 2z = 0,91 \text{ В} \end{cases}$$

$$0,84 \text{ В} + 2z = 0,91 \text{ В}$$

$$2z = 0,07 \text{ В}$$

$$z = \frac{0,07 \text{ В}}{2} = \frac{0,07 \cdot 8}{2} \text{ литров} = \frac{7 \cdot 8^4}{100 \cdot 2} = 0,28 \text{ литров смеси}$$

Ответ: 0,28 л

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 11190

№6 Обдумали общее количество угадываний за X

$\frac{X}{2}$ - угаданное кол-во малышей

Понятно, что больше работу первыми не можно делами,
т.к. если бы было малышей не угадывалось,
то $\frac{X}{2} > 0,48 (X-3)$, что противоречит условию $\Rightarrow$
ушёл либо 1, либо 2, либо 3 малыша

(1): ушёл 1 малыш

$$(X-3) \cdot 0,48 = \frac{X}{2} - 1$$

$$\frac{12X}{25} - \frac{36}{25} = \frac{X-2}{2}$$

$$24X - 72 = 25X - 50$$

$$X = -22, \text{ что не может быть}$$

(2): ушёл 2 малыша

$$(X-3) \cdot 0,48 = \frac{X}{2} - 2$$

$$\frac{12X}{25} - \frac{36}{25} = \frac{X-4}{2}$$

$$24X - 72 = 25X - 100$$

$$X = 28$$

(3): ушли 3 малыша

$$(X-3) \cdot 0,48 = \frac{X}{2} - 3$$

$$\frac{12X}{25} - \frac{36}{25} = \frac{X-6}{2}$$

$$24X - 72 = 25X - 150$$

$$X = 76 - \text{не может быть, т.к. по условию}$$

$$X \leq 75$$

Подходит только 2-ой вариант.

Проверим его:

$$X = 28 \Rightarrow \frac{X}{2} = 14 - \text{кол-во малышей угадано}$$

$$14 - 2 = 12 - \text{количество малышей}$$

$$12 : 0,48 = \frac{12-25}{12} = 25$$

$$28 - 3 = 25 - \text{количество людей}$$

$$25 = 25 - \text{все совпало}$$

Ответ: 28

№8

$$x^2 + \frac{x^2}{(1-x)^2} = 3$$

$$x^2(1+2x+x^2) + x^2 = 3(1+2x+x^2)$$

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 6x - 3 = 0$$

разложим на множители:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$$

$$\begin{cases} a+c=2 \\ ac+b+d=-1 \\ ad+bc=-6 \\ bd=-3 \end{cases}$$

пусть $a=3$
 $c=-1$

$$\begin{cases} a+c=3-1=2 \leftarrow \text{верно} \\ -3+b+d=-1 \\ 3d-b=-6 \\ bd=-3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b &= 3 \\ d &= -1 \end{aligned}$$

проверим:

$$(x^2 + 3x + 3)(x^2 - x - 1) = x^4 - x^3 - x^2 + 3x^3 - 3x^2 - 3x + 3x^2 - 3x - 3 =$$

$$= x^4 + 2x^3 - x^2 - 6x - 3 = 0$$

все совпало

Теперь есть два квадратичных уравнения:

(1): $x^2 + 3x + 3 = 0$ $D = 9 - 12 = -3 < 0 \Rightarrow$ решений нет $\Rightarrow \Sigma$ корней $= 0$

(2): $x^2 - x - 1 = 0$ $D = 1 + 4 = 5 > 0 \Rightarrow$ решение есть, и их 2

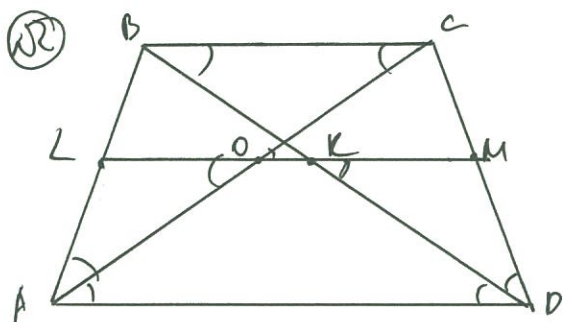
по теореме Виета: $x_1 + x_2 = -b/a$, где b -коэффициент у x^1
 a -коэфф. у x^2

$$x_1 + x_2 = -(-1)/1 = 1 \Rightarrow \Sigma \text{ корней} = 1$$

Общее Σ решений уравнений $= \Sigma_1 + \Sigma_2 = 0 + 1 = 1$

Ответ: 1

ШИФР 11190



BC || LM || AD
 (т.к. у трапеции основания параллельны, а с. линии параллельны основаниям)
 $BA = CD = 3,5 = \frac{7}{2}$ (даны, стороны равны)
 $AD = \frac{17}{2}$

$$\angle COM = \angle CAD \text{ (соотв. углы)} \\ \angle CDA = \angle CMD \text{ (-и-)} \Rightarrow$$

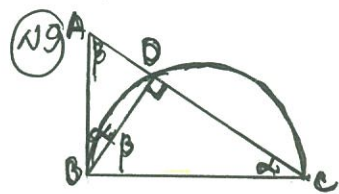
Пусть средняя линия будет LM
 $BL = LA = CM = MD$ (т.к. трапеция равнобокая)
 $BD \cap LM = (\cdot) O$
 $CA \cap LM = (\cdot) K$
 $\angle CDA = \angle BAD$, т.к. у равнобокой трапеции углы при основании равны
 $\angle CDB = \angle DBA = \angle BAD = \angle CAD$ (т.к. дигрессия)
 $\angle BCA = \angle CAD$ (т.к. углы при секущей у паралл. прямых)
 $\angle BDA = \angle CAD$ (-и-)
 $\angle ADO = \angle LDO \Rightarrow \triangle ALO - \text{равноб.} \Rightarrow LO = LA = \frac{1}{2} BA = \frac{7}{4}$
 (перп. падает на середину)
 $\angle MDO = \angle LDO \Rightarrow \triangle MDO - \text{равноб.} \Rightarrow KM = MD = \frac{1}{2} CD = \frac{7}{4}$
 (-и-)

$\triangle COM \sim \triangle CAD$ по 2 углам

$$\frac{CO}{CA} = \frac{OM}{AD} = \frac{CM}{MD} \Rightarrow OM = \frac{AD \cdot CM}{CD} = \frac{\frac{7}{4} \cdot \frac{17}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{7 \cdot 17 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{17}{4}$$

$$LM = LO + OM = \frac{7}{4} + \frac{17}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

Овет: 6



$AB = 30 \text{ см}$
 $BP = 24 \text{ см}$

$BD \perp AC$, т.к. если диаметр окружности является стороной треугольника, то этот треугольник прямоугольный, а диаметр окружности — его гипотенуза

$$\begin{aligned} \angle ABC = 90^\circ = \alpha + \beta \quad (\angle ABD = \alpha; \angle DBC = \beta) \\ \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ = \alpha + \beta \Rightarrow \angle BAD = \beta \\ \angle DBC + \angle DCB = 90^\circ = \beta + \alpha \Rightarrow \angle DCB = \alpha \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{по } \Sigma \text{ углов в} \\ \text{прямоугольном треугольнике} \end{array} \right\}$$

$$\cos \alpha = \frac{DB}{AB} = \frac{24}{30} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \quad (\text{т.к. } \sin \alpha > 0 \text{ и } \alpha \in (0; \frac{\pi}{2}))$$

по основному тригонометрическому соотношению

$$BC = \frac{DB}{\sin \alpha} = \frac{24 \cdot 5}{3} = 40 \text{ см} - \text{диаметр окружности}$$

$$l_{\text{окружности}} = 2\pi R = \pi d = 3,14 \cdot 40 \text{ см}$$

$$l_{\text{полукружности}} = \frac{l_{\text{окружности}}}{2} = \frac{3,14 \cdot 40}{2} \text{ см} = 3,14 \cdot 20 \text{ см} = 62,8 \text{ см}$$

Овет: 62,8 см.